Издательство МЦНМО
Москва • 2006

XI
Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Издательство МЦНМО
Москва • 2006

УДК 51
ББК 22.1
Т86

Настоящее издание осуществлено при поддержке Московского городского дворца детского (юношеского) творчества.

Т86 XI Турнир математических боёв им. А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2006.— 96 с.

ISBN 5-94057-231-6

Книга подготовлена по материалам XI летнего Турнира математических боёв им. А. П. Савина, заключительного этапа конкурса «Математика 6–8», проводимого журналом «Квант».

Здесь собраны условия и решения задач математической регаты, математических боёв, командной и личной олимпиады, а также математической карусели. Решения задач специально отделены от условий, чтобы читатель мог самостоятельно порешать понравившиеся ему задачи. В приложении приведены списки победителей Турнира.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся олимпиадными задачами по математике: школьников 6–9 классов, а также школьных учителей и руководителей математических кружков.

ББК 22.1

Издание подготовлено методической комиссией XI Турнира математических боёв им. А. П. Савина (руководитель А. Д. Блинков).

ISBN 5-94057-231-6
9 785940 572312 >

© МЦНМО, 2006.

Введение

Ежегодный летний математический турнир служит заключительным этапом конкурса «Математика 6–8», который проводится журналом «Квант». Одиннадцатый турнир состоялся (по традиции последних лет) в конце июня на базе отдыха «Берендеевы поляны» (Костромская область) и собрал 26 команд из Костромы, Магнитогорска, Москвы, Омска, Перми, Снежинска, Троицка и Харькова.

Организаторами этого турнира являлись: Московский городской дворец детского (юношеского) творчества и его филиал, Дом научно-технического творчества молодёжи, Департамент общего и профессионального образования Костромской области, Костромской центр дополнительного образования одарённых школьников, Федерация профсоюзов Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Содействие турниру оказали также компания Yandex и Клуб жён политиков «Подруги».

Председателем оргкомитета турнира являлся Г. В. Кондаков. В составе методической комиссии, осуществлявшей подбор задач, работали: А. Акопян, М. Берштейн, А. Блинков, Ю. Блинков, Д. Вельтищев, М. Вельтищев, М. Галамов, Е. Горская, В. Гуровиц, А. Жуков, Д. Калинин, Т. Караваева, Г. Мерзон, И. Раскина, В. Сендеров, А. Скопенков, Б. Френкин, Е. Чернышёва, П. Чулков.

Схема проведения фестиваля в последние годы остаётся неизменной. Турнир открывается двумя математическими регатами, проходящими параллельно (для 8–9 и 6–7 классов). Затем проводится командная олимпиада, по результатам которой (с учётом возраста школьников) команды ранжируются по лигам для проведения математических боёв. На прошедшем турнире соревнования проходили в четырёх лигах: высшей и первой для 8–9 классов; высшей для 7 классов и первой для 6–7 классов.

Помимо турнира математических боёв проводится устная личная олимпиада (также, как и регата, отдельно для двух возрастов). В свободное время школьники имели возможность ознакомиться с культурными достопримечательностями Костромы и Галича, поучаствовать в спортивных и культурных мероприятиях и интеллектуальных играх.

Распорядок фестиваля 2005 г.

- 25 июня — Математическая регата
- 26 июня — Командная олимпиада
- 27 июня — Математические бои, Первый тур
- 28 июня — Математические бои, Второй тур
- 29 июня — Личная олимпиада
- 30 июня — Математические бои, Третий тур
- 1 июля — Математические бои, Четвёртый тур

1. Условия задач

1.1. Математическая регата

1.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других по 3 яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов — 20.

1.2. (6 баллов) Изобразите как можно больше квадратов так, чтобы каждые два имели ровно по две общие вершины.

1.3. (6 баллов) В комнате 12 человек; некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека», — сказал первый. «Здесь не более одного честного человека», — сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый — что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?

Второй тур

2.1. (7 баллов) Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

2.2. (7 баллов) В результате измерения сторон и одной диагонали четырёхугольника получены числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Какова длина измеренной диагонали?

2.3. (7 баллов) Петя записал на компьютере число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Третий тур

3.1. (7 баллов) По шоссе со скоростью 60 *км/ч* едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 40 *км/ч*. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

3.2. (7 баллов) В треугольнике ABC угол A равен 40°, угол B равен 20°, а $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

3.3. (7 баллов) Можно ли так расположить фишки на доске 8×8, чтобы в любых двух вертикалях фишек было поровну, а в любых двух горизонталях — не поровну?

Четвёртый тур

4.1. (8 баллов) Докажите, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2004}{2005!} < 1.$$

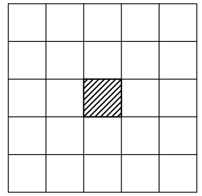

Рис. 1

4.2. (8 баллов) Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку (см. рис. 1). Разрежьте получившуюся фигуру на две части, из которых можно склеить куб $2 \times 2 \times 2$.

4.3. (8 баллов) Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел больше: хребтовых или овражных?

1.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) Существует ли такое натуральное число n, что число $2^8 + 2^{11} + 2^n$ является полным квадратом?

1.2. (6 баллов) Известно, что для сторон и углов треугольника ABC выполняется равенство $\frac{BC}{\cos\angle A} = \frac{AC}{\cos\angle B}$. Верно ли, что $AC = BC$?

1.3. (6 баллов) Может ли натуральное число-палиндром, состоящее из 100 цифр, быть простым? (Число называется *палиндромом*, если оно читается слева направо и справа налево одинаково.)

Второй тур

2.1. (7 баллов) См. задачу 3.1 Математической регаты 6–7 классов.

2.2. (7 баллов) Можно ли разрезать неравнобедренный треугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было сложить трапецию, у которой две стороны данного треугольника являются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

2.3. (7 баллов) Зал для танцев представляет собой n-угольник. Для каких k можно расставить вдоль стенок k светильников так, чтобы у каждой стенки стояло ровно по два светильника? (Если светильник стоит в углу, то он «занимает» две стенки.)

Третий тур

3.1. (8 баллов) См. задачу 4.1 Математической регаты 6–7.

3.2. (8 баллов) Какое количество сторон выпуклого многоугольника может иметь такую же длину, как и наибольшая диагональ этого многоугольника?

3.3. (8 баллов) Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполняется равенство $3xy + 3yz + 3zx = 5xyz + 3$.

Четвёртый тур

4.1. (9 баллов) Найдите наименьшее значение выражения

$$L(x, y) = \sqrt{(x-9)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y-3)^2 + 9}.$$

4.2. (9 баллов) Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая AO вторично пересекает окружность, описанную около треугольника BOC, в точке M. Найдите OM, если $BC = 3$, а $\angle BAC = 120°$.

4.3. (9 баллов) На плоскости отмечено n точек ($n > 1$) и рассматриваются всевозможные отрезки с концами в этих точках. Назовём отрезок *чётным*, если на нём лежит чётное количество отмеченных точек, и *нечётным*, если на нём лежит нечётное количество отмеченных точек. Каких отрезков больше: чётных или нечётных?

1.2. Математические бои

1.2.1. Первый тур

Первая Лига 6–7

1. Решая задачу, Гриша нашёл два двузначных натуральных числа. Для каждого из этих чисел Саша подсчитал сумму цифр, а Вова — произведение цифр. Могло ли произведение результатов Саши совпасть с суммой чисел, полученных Вовой?

И. Акулич

2. Берендей и Снегурочка играют в следующую игру. Они по очереди стирают буквы во фразе «БЕРЕНДЕЕВЫ ПОЛЯНЫ». За один ход стирается либо только одна буква, либо одна буква и все такие же буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву. Начинает Снегурочка. Кто выигрывает при правильной игре?

Фольклор

3. На шахматной доске изначально расставлено несколько ладей. Разрешается ставить на пустые клетки дополнительные ладьи, если каждая такая ладья угрожает не менее, чем двум имеющимся на доске ладьям. Какое наименьшее количество ладей надо изначально расставить, чтобы по указанным правилам можно было заполнить ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур.)

И. Акулич

4. На пяти островах завтракали 30 аистов. На каждом острове аисты

поделили лягушек поровну, причем каждый аист с первого острова съел больше, чем каждый аист со второго, со второго — больше, чем с третьего, и т. д. Сколько лягушек могло быть съедено на каждом из островов, если всего было съедено 42 лягушки, и каждый аист съел хотя бы одну лягушку?

Фольклор

5. Одновременно были зажжены две свечи одинаковой длины: одна потолще (сгорающая за 4 часа), другая потоньше (сгорающая за 2 часа). Через некоторое время обе свечи были потушены. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

Фольклор

6. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что он побывал на острове Невезения, имеющем форму многоугольника, у которого шесть идущих подряд углов острые. Можно ли утверждать, что барон лжёт?

Фольклор

7. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Чему равна сумма выбранных чисел?

Фольклор

8. Вася пытается подобрать такое целое число a, что $a^2 = \overline{МЯУМЯУ}$, где $М$, $Я$, $У$ — некоторые цифры, и $М \neq 0$. Удастся ли ему это сделать?

В. Сендеров

Высшая Лига 7

1. Решая задачу, Гриша нашёл десять двузначных натуральных чисел. Для каждого из этих чисел Саша подсчитал сумму цифр, а Вова — произведение цифр. Могло ли произведение результатов Саши совпасть с суммой чисел, полученных Вовой?

И. Акулич

2. На шахматной доске изначально расставлено n ладей. Разрешается поставить на пустую клетку дополнительную ладью, если она угрожает не менее, чем трём имеющимся на доске ладьям. При каком наименьшем n можно заполнить ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур.)

И. Акулич

3. Найдите все такие натуральные числа x, что

$$x^2 = \overline{\underbrace{y\ldots y}_{n}\underbrace{z\ldots z}_{n}}.$$

(Здесь y и z — ненулевые цифры, а $n > 1$.)

В. Сендеров

4. Продавец расположил набор из ста гирек массами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: m_1, m_2, $m_3, \ldots, m_{100}$. Докажите, что гирьки массами $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, |m_3 - 3|, \ldots, |m_{100} - 100|$ граммов можно расположить на двух чашах весов так, что весы окажутся в равновесии.

В. Произволов

5. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

6. В магазине продаются гирлянды лампочек, соединённых по кругу. Имеются гирлянды с любым количеством лампочек от 25 до 100. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Назовём *связанными* лампочки, между которыми находится ровно 11 лампочек. Если при включении какой-либо лампочки обе связанные с ней уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна одна из связанных с ней, то её нужно погасить. На гирлянде какой длины можно зажечь больше всего лампочек?

А. Малеев

7. Можно ли разрезать заданный треугольник на два треугольника так, что в каждом из них можно отметить по равной стороне, причём отмеченные стороны не лежат на одной прямой?

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

8. Треугольник ABC равносторонний. Точки K, L и M таковы, что $\triangle ABK = \triangle CBL = \triangle ACM = \triangle MBK = \triangle ALK$ (см. рис. 2). Докажите, что $CLKM$ — прямоугольник.

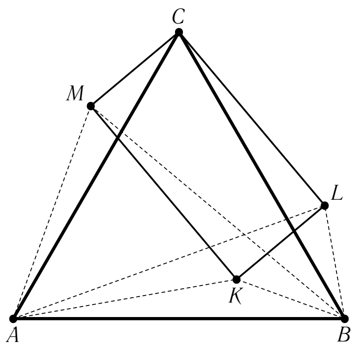

Рис. 2

Д. Калинин

Первая Лига 8–9

1. Существуют ли десять натуральных чисел, обладающих следующим свойством: произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

И. Акулич

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. См. задачу 8 Первой Лиги 6–7.

4. Докажите, что для любых положительных чисел a, x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$) выполняется неравенство:

$$\frac{x_1}{a+x_1} + \frac{x_2}{a+x_2} + \ldots + \frac{x_n}{a+x_n} > \frac{S}{a+S},$$

где $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

В. Сендеров

5. В строку выписывается последовательность целых чисел. Первый член последовательности положителен, а каждый следующий её член, начиная со второго, вычисляется по следующему правилу:

1) если в предыдущем числе нет одинаковых цифр, то к предыдущему числу прибавляется количество его цифр;

2) если в предыдущем числе есть одинаковые цифры, то из предыдущего числа вычитается двойка.

Докажите, что, начиная с определённого места последовательности, числа станут периодически повторяться.

А. Жуков

6. В магазине продаются гирлянды из $n > 2$ лампочек, соединённых по кругу. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Если при включении какой-либо лампочки обе её соседние уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна соседняя, то её нужно погасить. Какое наибольшее количество лампочек можно зажечь таким способом?

А. Малеев

7. Разрежьте заданный треугольник на три треугольника так, что в них можно отметить по равной стороне, причём никакие две из трёх отмеченных сторон не лежат на одной прямой.

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

8. Через точку O внутри квадрата $ABCD$ провели прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые пересекли стороны AB, BC, CD и DA в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что DY — биссектриса угла XYC. Докажите, что площадь прямоугольника $XBYO$ в два раза больше площади четырехугольника $ZDTO$.

Д. Калинин

Высшая Лига 8–9

1. Для каких натуральных n существуют n таких различных натуральных чисел, что произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

И. Акулич

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Найдите все такие целые числа x, что $x^2 = \overline{yyzztt}$, где y, z, t — некоторые цифры, $y \neq 0$.

В. Сендеров

4. См. задачу 4 Первой Лиги 8–9.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. Можно ли с помощью циркуля и линейки разбить произвольный треугольник на четыре треугольника так, чтобы в них можно было отметить по равной стороне, причём никакие две из четырёх отмеченных сторон не лежали бы на одной прямой и не были бы параллельны друг другу?

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

8. В окружности проведены две равные хорды AB и BC, угол между которыми равен $30°$. Квадрат расположен так, что одна его вершина находится на дуге AC, другая — на дуге BC, а две оставшиеся — по одной на хордах. Докажите, что сторона квадрата равна радиусу окружности.

М. Волчкевич

1.2.2. Второй тур

Первая Лига 6–7

1. В двух ящиках лежат перчатки трех цветов: в левом ящике — 17 белых, 4 синих и 4 красных (все — на левую руку), в правом ящике — 13 белых, 8 синих и 8 красных (все — на правую руку). Какое наименьшее количество перчаток надо вытащить (одновременно и не глядя), чтобы среди них обязательно нашлась пара перчаток одного цвета?

Фольклор

2. Из шахматной доски вырезали связную фигуру, в которой белых клеток не меньше, чем чёрных. Верно ли, что на этой фигуре можно разместить столько доминошек, сколько в ней чёрных клеток? (Одна доминошка занимает две соседние клетки.)

А. Гусаков

3. В государстве несколько городов. Из каждого города выходит хотя бы одна дорога, и между любыми двумя городами не может быть больше одной дороги. Сколько городов может быть в государстве, если всего в нём 7 дорог?

И. Раскина

4. У Ксюши было 80 рублей, а у Наташи — 64 рубля. Каждая из девочек захотела купить как можно больше шоколадок «Алёнка». Ксюша получила восемь рублей сдачи, а Наташа — десять. Смогут ли девочки, сложившись, купить ещё одну шоколадку?

Фольклор

5. Берендей и Снегурочка играют в игру на бесконечной клетчатой полоске ширины 1. Снегурочка своим ходом ставит два крестика в любые свободные клетки. Берендей стирает либо одиночный крестик, либо любое количество крестиков, идущих подряд. Начинает Снегурочка. Может ли Снегурочка в какой-то момент получить 2005 крестиков, идущих подряд?

Фольклор

6. На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше Вовы в 2 раза, выше Пети в 3 раза, выше Андрея в 4 раза и выше Тани в 6 раз». «Ты это здорово подметил, — отозвался Андрей, — а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живет Андрей?

Фольклор

7. Семь чисел записали по кругу. Затем для каждых двух соседних чисел посчитали их сумму и записали между ними, а первоначальные числа стёрли. Получилась замкнутая цепочка из чисел 1, -5, 5, 22, 9, -1, 3. Можно ли найти исходные числа?

Фольклор

8. Из Москвы с улицы Донской в Берендеевы Поляны выехали автобусы с детьми. Когда они проехали 70 *км*, с той же улицы вслед за ними выехал Григорий Вячеславович и догнал автобусы в Костроме. После этого автобусы проехали 40 *км*, а Григорий Вячеславович за то же время — 50 *км*. Найдите расстояние от Москвы до Костромы.

Фольклор

Высшая Лига 7

1. Гномы Сеня, Миша, Гриша, Дима и Вова соревновались в беге, в прыжках в высоту и в длину. Каждый раз на первом месте был гном в красной майке, на втором — в синей, на третьем — в зелёной (у каждого гнома только одна майка). Последнее место в беге занял гном Сеня, в прыжках в высоту — гном Вова, в прыжках в длину — гном Гриша. Могут ли у гномов Миши и Димы быть майки одинакового цвета?

Т. Караваева

2. Грани кубика имеют такой же размер, как и клетки шахматной доски. Одна из граней красная, а остальные — синие. Кубик поставили на одну из клеток красной гранью вниз и прокатили (перекатывая через ребро) по всей доске, пройдя каждую клетку по одному разу. В итоге кубик оказался на исходной клетке, красной гранью вниз. Найдите наибольшее возможное количество клеток, на которых кубик стоял красной гранью вниз.

В. Гуровиц

3. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

4. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

5. Про два треугольника известно, что для каждого из них сумма длин любых двух его сторон равна сумме длин каких-нибудь двух сторон другого треугольника. Обязательно ли треугольники равны?

Д. и М. Вельтищевы

6. В стране n городов. Между некоторыми из них проложены дороги, причём из каждого города ведёт хотя бы одна дорога (между двумя городами может быть не более одной дороги). Общее число дорог — 100. Найдите все возможные значения n.

А. Скопенков

7. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 - 4x = y^2$.

В. Сендеров

8. Сколько натуральных чисел из первой тысячи обладают свойством: сумма всех их делителей нечётна?

А. Блинков

Первая Лига 8–9

1. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. На доске написаны числа от 1 до 100. Два игрока по очереди вычёркивают числа, пока не останется два числа. Если их можно поставить вместо p и q в уравнение $x^2 + px + q$ так, чтобы у этого уравнения были целые различные корни, то выигрывает второй игрок, а иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Е. Куликов

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр. Докажите, что

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > p.$$

В. Сендеров

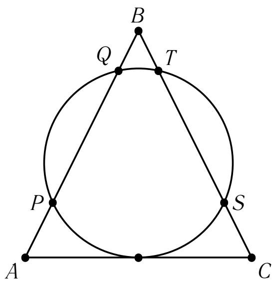

Рис. 3

6. Окружность радиуса R касается основания AC равнобедренного треугольника ABC в его середине и пересекает сторону AB в точках P и Q, а сторону CB в точках S и T (см. рис. 3). Окружности, описанные около треугольников SQB и PTB, пересекаются в точках B и X. Найдите расстояние от точки X до основания треугольника ABC.

Д. Калинин

7. Существует ли такое натуральное число a, что в последовательности

$$x_n = n^2 + 2005an + 2004a^2$$

любые два соседних члена взаимно просты?

В. Сендеров

8. См. задачу 8 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Она проецируется на стороны BC, CA, AB в их внутренние точки A', B', C' соответственно, а затем — в точки A'', B'', C'' на сторонах $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно. Докажите, что

$$PA \cdot PA' \cdot PA'' = PB \cdot PB' \cdot PB'' = PC \cdot PC' \cdot PC''.$$

А. Заславский

2. В первом ряду шахматной доски стоят восемь одинаковых чёрных ладей, а в последнем ряду — восемь одинаковых белых ладей. За какое минимальное число ходов белые ладьи могут обменяться местами с чёрными? (Ходы чёрных и белых ладей не обязательно чередуются.)

С. Токарев

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Первой Лиги 8–9.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

1.2.3. Третий тур

Первая Лига 6–7

1. На двух чашках весов лежат гирьки так, что весы показывают равновесие. Все эти гирьки разложили иначе по чашкам, но так, что весы вновь показали равновесие. В третий раз на левой чашке поместили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. На правой чашке тоже оставили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. Будет ли на весах вновь равновесие?

В. Произволов

2. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей и с Аней. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, с Борей или с Витей?

В. Гуровиц

3. Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, требующихся для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана эта задача?

Фольклор

4. Среди 8 человек имеется один фальшивомонетчик. Каждый знает, кто фальшивомонетчик, но стесняется назвать его. Инспектор Варнике может выделить любую группу среди этих 8 человек, состоящую более чем из одного человека, и задать вопрос: «Имеется ли среди вас фальшивомонетчик?» На этот вопрос все отвечают правду. За какое наименьшее количество вопросов инспектор может гарантированно определить фальшивомонетчика?

А. Жуков

5. Рубик хочет распилить свой кубик на уголки из трёх маленьких кубиков. Сможет ли он это сделать?

Фольклор

6. Вместо матбоя жюри и две команды решили сыграть в следующую игру. В кучке лежит 451 спичка. Ходят по очереди. Команды имеют право брать 1 или 2 спички, а жюри — 1, 2 или 3. При этом команды объединяют свои усилия против жюри, а жюри имеет право выбрать очередь своего хода: первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто победит при правильной игре?

Фольклор

7. В вершинах куба записано по натуральному числу. В середине каждого ребра записана сумма чисел, находящихся на концах этого ребра, а в центре каждой грани — сумма чисел, находящихся в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 26 чисел равняться 2005?

Фольклор

8. В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 весёлых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй — вдвое быстрее, третий — вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

По мотивам А. Заславского

Высшая Лига 7

1. В треугольнике ABC сторона AB равна 1. Известно, что одна из биссектрис треугольника ABC перпендикулярна одной из его медиан, а некоторая другая биссектриса перпендикулярна другой медиане. Чему может быть равен периметр треугольника ABC?

А. Акопян, Ю. Блинков, Е. Горская

2. В квадрате $ABCD$ отметили 9 точек, не лежащих на диагоналях и отрезках, соединяющих середины противоположных сторон квадрата. Рядом с каждой из них написали номера вершин квадрата в порядке близости к данной точке. Верно ли, что рядом с какими-то двумя точками написано одно и то же?

Д. Калинин

3. Взаимно простые натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^4$. Докажите, что число xy делится на 8.

В. Сендеров

4. В 100-этажном доме испорчен лифт. Он может либо подниматься при нажатии одной кнопки на 79 этажей вверх, либо при нажатии другой — на 21 этаж вниз. Когда сверху меньше 79 этажей, лифт вверх не пойдёт, аналогично — вниз. Лифт отправляется с первого этажа. Какое наименьшее количество раз надо нажать на кнопки, чтобы лифт вернулся на первый этаж?

А. Спивак

5. В некотором государстве 80 городов. Один из них является столицей. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходит либо одна, либо три дороги. Известно, что из каждого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Назовем город *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех подсчитанных чисел.

А. Скопенков

6. В треугольнике есть сторона, длина которой больше 1. Верно ли, что его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1?

А. Шаповалов

7. В противоположных углах шахматной доски записаны числа 1 и 15. Докажите, что можно, и притом единственным образом, расставить в остальные клетки числа так, чтобы каждое из поставленных чисел равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

В. Гуровиц

8. См. задачу 4 Первой Лиги 6–7.

Первая Лига 8–9

1. Три окружности проходят через точку X. Пусть A, B, C — точки их пересечения, отличные от X; A' — вторая точка пересечения прямой AX и окружности BCX; точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$ подобны.

А. Заславский

2. В четырёхугольнике $ABCD$ прямые, симметричные диагонали BD относительно биссектрис углов B и D, пересекаются в точке P, расположенной внутри четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что проекции точки P на стороны $ABCD$ являются вершинами равнобедренной трапеции или параллелограмма.

А. Заславский

3. Взаимно простые натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^4$. Докажите, что число xy делится на 7.

В. Сендеров

4. Докажите, что существуют натуральные числа m, n, для которых
$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9}.$$

В. Берник

5. Алхимик хранит эликсир в четырёх одинаковых сосудах. Можно сливать два сосуда в один (сосуд может вместить весь эликсир), или поставить два сосуда на чашечные весы и лить из третьего в тот, где эликсира меньше, пока весы не уравновесятся (или эликсир в третьем сосуде не кончится). Алхимик помнит, что так можно получить сосуд ровно с одной унцией эликсира (но не помнит, как), и что в каждом сосуде целое число унций эликсира (но не помнит, сколько). Первоначально один из сосудов пуст. Докажите, что можно, попереливав, восстановить исходные количества в каждом сосуде и при этом узнать, где сколько эликсира.

А. Шаповалов

6. В некотором государстве 80 городов. Один из них является столицей. Некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что из каждого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Назовем город *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Докажите, что сумма всех подсчитанных чисел меньше 2005.

А. Скопенков

7. Улицы города проходят либо с севера на юг, либо с запада на восток. С одного перекрёстка выезжают три велосипедиста: на север, на восток и на юг. Через некоторое время они встречаются на другом перекрёстке, причём каждый въезжает на него в том же направлении, в каком он выехал с первого перекрёстка. Докажите, что один из велосипедистов пересёк траекторию другого.

Б. Френкин

8. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Треугольник вписали в окружность. Через точку пересечения его медиан провели произвольную хорду. Докажите, что сумма квадратов расстояний от её концов до всех вершин треугольника в три раза больше квадрата длины самой хорды.

М. Волчкевич

2. См. задачу 2 Первой Лиги 8–9.

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. Имеется 400 положительных чисел, каждое из которых меньше суммы любых восьми других. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел, четвёртая степень каждого из которых меньше суммы четвёртых степеней любых двух других.

И. Акулич

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. В двух клетках шахматной доски записаны числа 1 и 13 соответственно (см. рис. 4). Докажите, что можно, и притом единственным образом, расставить в остальные клетки числа так, чтобы каждое число, кроме тех двух, которые были на доске изначально, равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей (клетки называются *соседними*, если они имеют общую сторону).

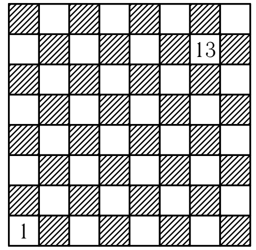

Рис. 4

В. Гуровиц

1.2.4. Четвёртый тур

Высшая Лига 7

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает продолжение стороны AC в точке R. Докажите, что $BQ = AR$.

А. Акопян

2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен $120°$. На стороне AC отмечена точка M, делящая отрезок AC в отношении $1 : 2$. Найдите угол MBC.

А. Хачатурян

3. Даны числа a и b. Известно, что среди чисел $a + b$, $a - b$, ab и $\frac{a}{b}$ три числа равны, а четвёртое отлично от них. Найдите все возможные значения a и b.

Б. Френкин

4. Двое играют в игру. Первый пишет на доске (если она пуста) или дописывает справа к написанному числу одну из цифр 1, 2 или 3. Второй может приписать в любом месте или вычеркнуть в любом месте числа́ две одинаковые цифры, стоящие рядом, либо приписать или вычеркнуть два одинаковых стоящих рядом двузначных числа. Вначале доска пуста. Может ли первый добиться того, что на доске появится не менее чем 2005-значное число?

И. Иванов

5. Докажите, что в вершинах любого конечного графа можно расставить натуральные числа так, чтобы наименьшее общее кратное любой пары чисел в вершинах, соединённых ребром, было равно одному и тому же числу, а наименьшее общее кратное чисел в любой паре вершин, не соединённых ребром, от этого числа отличалось.

А. Шаповалов

6. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 10$ все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы так, что произведение чисел в одной из групп отличалось от произведения чисел в другой группе не более, чем на 3% (проценты берутся от меньшего числа).

И. Акулич

7. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в какой-то цвет, при этом в любой строке и любом столбце есть клетки только двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может быть использовано?

Д. Калинин

8. Пусть $S(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и само число). Для каких n выполняется равенство $S(2n) = 3S(n)$?

А. Блинков

Вариант B

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle QDA$. Докажите, что $\angle BQA + \angle CQD = 180°$.

В. Произволов

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся стороны AB и продолжений сторон BC и AC, касается продолжения стороны AC в точке R. Доказать, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

А. Акопян

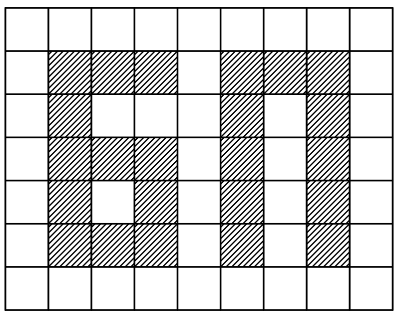

Рис. 5

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

6. См. задачу 7 Высшей Лиги 7.

7. Когда-то давным-давно при въезде в Берендеевы Поляны стоял щит, изображённый на рис. 5. Постройте прямую так, чтобы она разделила каждую из букв «Б» и «П» на две части равной площади («часть» — то, что лежит по одну сторону от прямой).

Фольклор

8. Положительные числа x, y и z таковы, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Докажите, что

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{y+z}{y^2+yz+z^2} + \frac{z+x}{z^2+zx+x^2} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Д. Калинин

Вариант А

1. См. задачу 1 Варианта B.

2. См. задачу 2 Варианта B.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. Двое по очереди красят клетки доски 2005×2005. Клетку нельзя закрашивать, если в её столбце или строке уже есть хотя бы две закрашенные клетки. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

С. Спиридонов

5. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

6. Докажите, что уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

В. Лецко

7. На плоскости даны 1000 синих и 1000 красных точек. Расстояние между любыми точками разного цвета не превосходит 1. Докажите, что либо все красные, либо все синие точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

А. Акопян, В. Дольников

8. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, произведение любых ста членов которой делится на их сумму?

И. Акулич, В. Сендеров

1.3. Личная олимпиада

1.3.1. 6–7 класс

Довывод

1. В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?

Г. Гальперин

2. Из книжки, состоящей из трёх листов (см. рис. 6), вырежьте лист Мёбиуса. *Листом Мёбиуса* называется полоска с любыми краями, перекрученная один раз (см. рис. 7) и склеенная (см. рис. 8).

Фольклор

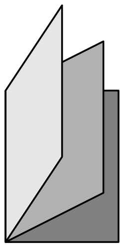

Рис. 6

Рис. 7

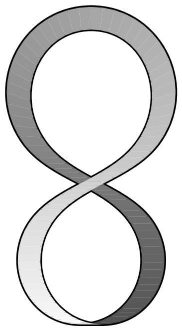

Рис. 8

3. Перед экзаменом Вася вырвал из учебника 20% страниц. Докажите, что если нумерация страниц начиналась с 1, то сумма номеров оставшихся страниц делится на 4.

В. Гуровиц

4. В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне — произведение чисел, записанных в её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

А. Шаповалов

Вывод

5. Прямоугольник разрезан на нечётное количество равных частей. Верно ли, что они все являются прямоугольниками?

С. Маркелов

6. В бесконечном городе все кварталы — квадраты одного размера. Велосипедист стартовал с перекрестка. Через полминуты за ним поехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрестке поворачивает либо направо, либо налево. Могут ли они встретиться?

М. Вельтищев, П. Купцов

7. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

М. Волчкевич

1.3.2. 8–9 класс

Довывод

1. Докажите, что если графики двух квадратных трехчленов симметричны относительно прямой, то эта прямая параллельна одной из координатных осей или совпадает с ней.

А. Блинков

2. На арене цирка (не в её центре) стоит тумба, на которой сидит лев. По команде укротителя лев спрыгивает с тумбы и бежит по прямой. Добежав до бортика, он поворачивает на 90°, снова добегает до бортика, поворачивает на 90° и бежит дальше по арене. Докажите, что на арене (но не на тумбе) можно положить кусочек мяса так, что, независимо от первоначального направления движения, лев съест мясо.

М. Панов

3. Таблица 3×3 заполнена нулями. За один ход разрешается увеличить на единицу числа в трёх клетках, образующих уголок любой ориентации. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа стали равными и положительными?

Р. Савченко

4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} \leqslant \sqrt{3}.$$

В. Сендеров

Вывод

5. 11 лучших футбольных команд Украины сыграли каждая с каждой по одному матчу. При этом оказалось, что каждая команда забила в первом матче 1 гол, во втором матче 2 гола, ..., в десятом матче — 10 голов. Какое наибольшее количество сыгранных матчей могло закончиться вничью?

И. Акулич

6. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Через точку P проведены прямые, параллельные сторонам треугольника, которые пересекают другие стороны в точках X, Y, Z, T, V, W. Докажите, что если эти шесть точек лежат на одной окружности, то её центр лежит на прямой OP, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

А. Акопян

7. Существует ли арифметическая прогрессия, составленная из 2005 натуральных чисел, ни одно из которых не является квадратом, однако их произведение — квадрат?

В. Сендеров

1.4. Командная олимпиада

В скобках указаны номера классов, для которых предлагалась задача.

1. [7] В равенстве $AX \cdot ЭX = XЭ \cdot XA$ буквы обозначают цифры. Докажите, что $\frac{X}{Э} = \frac{A}{X}$.

А. Жуков

2. [7] На плоскости нарисовали четыре равных треугольника так, что любые два имеют ровно две общих вершины. Верно ли, что все они имеют общую вершину?

В. Гуровиц

3. [7] Матбой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался матбой?

А. Заславский

4. [7] Каждую букву русского алфавита закодировали последовательностью из нулей и единиц (последовательности могут быть разной длины). Используя этот код, Сеня записал слово «СЛОН». Оказалось, что полученная последовательность нулей и единиц расшифровывается однозначно. Какое наименьшее количество цифр могло в ней быть?

А. Акопян

5. [7, 8] На доске записаны числа от 1 до n. Два игрока по очереди вычеркивают какое-нибудь число и все числа, не взаимно простые с ним (если такие существуют). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Докажите, что найдется $n > 1000$ такое, что выигрышной стратегией обладает первый игрок.

Д. Григоренко

6. [7, 8, 9] Можно ли, используя по одному разу каждую из цифр от 0 до 9, составить число, обладающее следующими свойствами: если вычеркнуть двойку, то оно поделится на 2; если вычеркнуть тройку, то оно поделится на 3; если вычеркнуть четверку, то оно поделится на 4; … ; если вычеркнуть девятку, то оно поделится на 9?

И. Акулич

7. [7, 8, 9] На клетчатом листе по линиям сетки нарисован многоугольник, который можно разрезать на 30 квадратиков 2×2. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно из него гарантированно вырезать?

Т. Караваева

8. [7] Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$, а также $\angle CAD = \angle CDB$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

В. Произволов

9. [8, 9] Положительные числа x и y таковы, что $x+y > 1$. Докажите, что $2(x^2 + y^2) > x + y$.

В. Сендеров

10. [8, 9] Пусть $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$), точка E лежит на отрезке BC. На отрезке AD постройте точку X, такую что $YZ \parallel AD$, где Y — точка пересечения AE и BX, а Z — точка пересечения DE и CX.

В. Сендеров

11. [9] У Пети был прямоугольный коврик с целочисленными сторонами, причём длина была кратна ширине. Петя разрезал его на части и сшил их так, что снова получился прямоугольный коврик, причём длина увеличилась на простое число p, а ширина осталась целочисленной. Найдите длину нового коврика.

Т. Караваева

12. [8] Треугольными называются числа, представимые в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное. Существуют ли треугольные числа, большие чем 10^{100}, сумма которых также является треугольным числом?

В. Произволов, В. Сендеров

13. [9] Треугольными называются числа, представимые в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное. Существуют ли два треугольных числа, больших чем 10^{100}, сумма которых также является треугольным числом?

В. Произволов, В. Сендеров

14. [8, 9] Выписано несколько n-значных чисел, в записи которых используются только цифры 1 и 2, причём любые два числа отличаются по крайней мере в 51% разрядов. Докажите, что выписано не более пятидесяти одного числа.

А. Шень

15. [8, 9] Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AB. Точки O_1, O_2 и O — центры вписанных окружностей треугольников ACH, BCH и ABC соответственно. Докажите, что отрезки CO и O_1O_2 равны и перпендикулярны.

А. Хачатурян

1.5. Математическая карусель

1.5.1. Исходный рубеж

1. У каждого из троих ребят есть старинные монеты. У первого и второго вместе на 6 монет больше, чем у второго и третьего. Сколько монет у первого мальчика, если у всех троих всего 11 монет?

2. Полный бидон молока стоит 29 рублей, а бидон, заполненный молоком наполовину, стоит 18 руб 50 коп. Сколько стоит пустой бидон?

3. Разделите фигуру (см. рис. 9) по линиям сетки на четыре равные части, чтобы в каждой части была ровно одна закрашенная клетка.

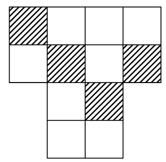

Рис. 9

4. У скольких пятизначных чисел все цифры чётные?

5. Хоккейная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 шайбы и пропустив одну шайбу. Один из матчей она выиграла, другой свела вничью, а третий проиграла. С каким счетом закончился каждый матч?

6. Сестёр у Вити на две больше, чем братьев. На сколько в этой семье девочек больше, чем мальчиков?

7. Сколько существует трёхзначных чисел, делящихся на 17 без остатка?

8. В полдень по местному времени из города A в город B вылетел самолёт, совершил там посадку в 17 часов местного времени и отправился обратно в 21 час местного времени. Самолёт вернулся в город A в 10 утра местного времени города A. Сколько часов длится перелёт самолёта между городами?

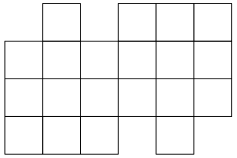

Рис. 10

9. Разрежьте на 4 равные части фигуру, изображённую на рис. 10.

10. Приведите один пример, как можно заменить звездочки знаками действий (умножения, деления, сложения или вычитания) и расставить скобки, чтобы равенство было верным:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 100.$$

11. Сумма двух чисел равна 2005. Частное от деления большего числа на меньшее равно 6. А чему равен остаток?

12. Решите ребус: $** + *** = ****$, если каждое число — палиндром (то есть читается одинаково справа налево и слева направо).

1.5.2. Зачётный рубеж

1. Два пакета молока и пачка творога стоят 26 руб. Две пачки творога и пакет молока стоят 26 руб 80 коп. Сколько стоит пакет молока?

2. В классе 20 человек. Каждый из них ходит в кружок по математике или в кружок по вышиванию, а 7 человек посещают и тот, и другой кружок. В кружок по математике ходит в 2 раза меньше школьников этого класса, чем в кружок по вышиванию. Сколько ребят этого класса ходят в кружок по математике?

3. В написанном на доске примере на умножение хулиган изменил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример.

4. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 сольдо, без второго — 85, без третьего — 80, без четвертого — 75 сольдо. Сколько у кого денег?

5. Сто игроков играли в теннис. Проигравший игру обижался и уходил. Какое наибольшее число теннисистов могло выиграть по две партии?

6. В семейном ансамбле «Ласковый Лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины.

Один из них поёт, его отец играет на шарманке, брат держит в руках микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?

7. Сколькими способами можно заменить в числе $**253*$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число делилось на 72?

8. Написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвёртое, и так далее. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое равно 7?

9. Разделите фигуру по линиям сетки на четыре равные части, чтобы в каждой части была ровно одна закрашенная клетка (см. рис. 11).

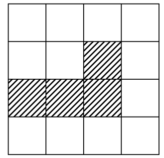

Рис. 11

10. Коля коллекционирует автобусные билетики с номерами от 000 000 до 999 999, у которых сумма цифр номера четна. Два билета с одним и тем же номером Коле не нужны. Сколько билетов будет в полной коллекции Коли? (Здесь билет с номером 000 000 существует!)

11. Представьте число 2004 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

12. К занумерованным от 1 до 6 граням кубика приставили ещё 6 кубиков такой же величины так, чтобы грани с одинаковыми номерами совместились. Какова может быть сумма открытых цифр на гранях получившейся фигуры?

13. Одну из сторон прямоугольника увеличили на 99 *см*, а другую уменьшили на 1 *см*. Как может измениться площадь прямоугольника: увеличиться, уменьшиться или остаться неизменной?

14. Коля и Витя, гуляя по парку, набрели на круглую поляну, обсаженную дубами. Коля пошел вокруг поляны, считая деревья. Витя сделал то же, но начал с другого дерева. Дерево, которое было у Коли под номером 31, у Вити было 13-е, а 13-е — под номером 35. Сколько дубов росло вокруг поляны?

15. В первой строке записали число 1. Во второй — 2, 3. В третьей — 3, 4, 5, и так далее: в n-ой строке записано n подряд идущих натуральных чисел, начиная с n. Сколько раз будет выписано число 2005?

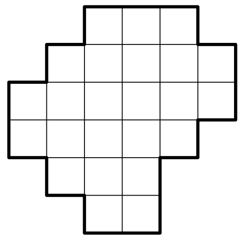

Рис. 12

16. Разрежьте на 4 равные части фигуру, изображенную на рис. 12.

17. У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

18. Лыжник рассчитал, что если он будет проходить в час 10 *км*, то прибудет на турбазу на час позже срока, а если будет бежать со скоростью

15 *км/ч*, то прибудет на час раньше срока. С какой скоростью ему надо бежать, чтобы прибыть точно в срок?

19. Сколько существует трёхзначных чисел, которые при любой перестановке цифр делятся на 6?

20. Имеется 30 брёвен, длины 3 и 4 метра, суммарная длина которых равна 100 метров. Сколько распилов нужно сделать, чтобы распилить брёвна на куски длины 1 метр? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.)

2. Решения задач

2.1. Математическая регата

2.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. Ответ: 10 или 52.

Первое решение. Если бы в каждом пакете было по 3 яблока, то всего яблок было бы 60, но на самом деле яблок на 49 больше. Значит, «лишние» яблоки надо распределить поровну по некоторым пакетам. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего пакетов — 20, то либо в 7 пакетах содержится по 7 «лишних» яблок, либо в одном пакете 49 «лишних» яблок. В первом случае $x = 10$, а во втором случае $x = 52$.

Второе решение. Пусть есть n пакетов, в которых лежит по 3 яблока. Тогда количество пакетов, в которых находится по x яблок, равно $20 - n$. Из условия следует, что $3n + x(20 - n) = 109$. Преобразуем полученное уравнение так, чтобы его левую часть можно было разложить на множители: $20x + 3n - nx - 60 = 49 \Leftrightarrow 20(x - 3) - n(x - 3) = 49 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 3)(20 - n) = 49$. Отсюда получим, что

$$\begin{cases} x = 10, \\ n = 13 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 52, \\ n = 19. \end{cases}$$

1.2. Решение. Можно изобразить три квадрата, удовлетворяющих условию (см. рис. 13 и 14).

Комментарий. Можно доказать, что более трёх квадратов изобразить нельзя, и что никаких других способов расположения трёх квадратов не существует, однако в задаче это не требуется.

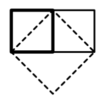

Рис. 13

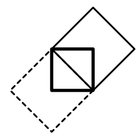

Рис. 14

1.3. Ответ: 6 человек.

Решение. Заметим, что если кто-то из присутствующих солгал, то и все предыдущие солгали. Такие в комнате есть, иначе первый сказал правду, а по его словам, честных в комнате нет. По аналогичной причине в комнате обязательно есть и честные.

Пусть в комнате x лжецов. Последний лжец сказал, что в комнате не более $(x - 1)$ честного. Значит, на самом деле в комнате не менее x честных. Далее, $(x + 1)$-й человек уже сказал правду про то, что в комнате не более x честных. Значит, количество честных в точности равно x, то есть количеству лжецов. Следовательно, в комнате 6 честных человек.

Второй тур

2.1. Ответ: 1760 метров.

Первое решение. Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Так как скорости паромов постоянны, то до второй встречи каждый из них пройдёт втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 метров, то до второй встречи он прошёл расстояние $720 \cdot 3 = 2160$ метров. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 метров. Следовательно, ширина реки равна $2160 - 400 = 1760$ метров.

Второе решение. Пусть ширина реки равна S метров, а скорости паромов равны x и y. Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{720}{x} = \frac{S-720}{y}, \\ \frac{S+400}{x} = \frac{2S-400}{y}. \end{cases}$$

Разделим одно уравнение системы на другое, и после преобразований получаем $S^2 = 1760S$, откуда $S = 1760$ (корень $S = 0$ — посторонний по смыслу задачи).

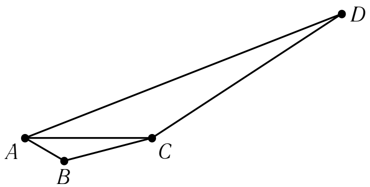

Рис. 15

2.2. Ответ: 2,8.

Решение. Пусть измерены стороны четырёхугольника $ABCD$ и диагональ AC (см. рис. 15). Так как AC — общая сторона двух треугольников, то $AC \neq 7{,}5$ (оставшиеся числа не могут быть длинами сторон двух треугольников в силу неравенства треугольника). Следовательно, длину 7,5 имеет одна из сторон, например, AD. Тогда в треугольнике ADC длины остальных сторон равны 5 и 2,8 (иначе не будет выполняться неравенство треугольника). Случай $AC = 5$ невозможен, потому что стороны треугольника ABC не могут иметь длины 1, 2 и 5. Значит, $AC = 2{,}8$, а $CD = 5$. Оставшиеся стороны AB и BC имеют длины 1 и 2 (в любом порядке).

2.3. Ответ: нет, не может.

Решение. Воспользуемся тем, что остатки от деления на 9 любого натурального числа и его суммы цифр равны. Если этот остаток отличен от нуля, то и после прибавления к числу суммы его цифр остаток будет отличен от нуля. Так как последовательность чисел, появляющихся на экране, начинается с числа 1, в ней никогда не встретится число, кратное 9. Но сумма цифр числа 123456789 равна 45, поэтому это число делится на 9.

Третий тур

3.1. Ответ: 200 метров.

Решение. Так как первоначальная скорость движения колонны равна 1000 *м/мин*, то «хвост» колонны окажется у поста ДПС через 0,3 минуты после того, как мимо ДПС проедет «голова» колонны. За это время голова успеет проехать $\frac{40}{60}$ *км/мин* $\cdot$ 0,3 *мин* = 0,2 *км* = 200 *м*.

3.2. Ответ: 4.

Решение. Отложим на стороне AB отрезок BD, равный BC. Тогда треугольник BCD — равнобедренный с углом при вершине 20°, поэтому углы при основании равны 80° (см. рис. 16). Пусть CE — биссектриса треугольника ABC. Из условия следует, что $\angle ACE = 60^\circ$, поэтому $\angle AEC = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$. Таким образом, в треугольнике DEC равны два угла, поэтому он равнобедренный. Тогда угол при его вершине C равен 20°, поэтому $\angle ACD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Значит, треугольник ACD также равнобедренный, следовательно, $CE = CD = AD = AB - BC = 4$.

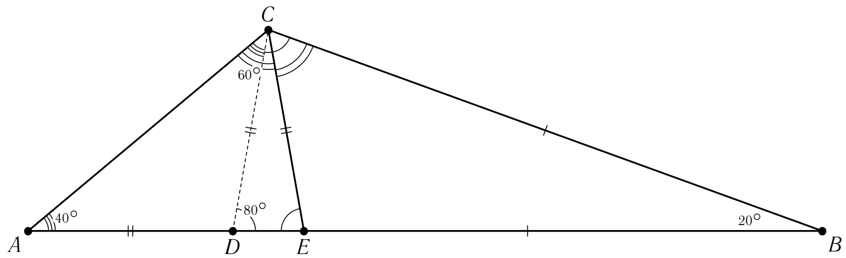

Рис. 16

3.3. Ответ: да, можно. Например, фишки можно расположить так, как показано на рис. 17.

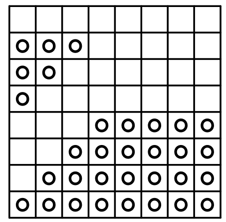

Рис. 17

Комментарий. Поиск искомого расположения облегчается следующим рассуждением. Количество фишек на горизонтали может быть любым целым числом от 0 до 8. Сумма всех этих чисел, взятых по одному разу, равна 36. Если в любых двух горизонталях разное количество фишек, то отсутствует ровно одно из этих девяти чисел. Так как при этом во всех восьми вертикалях поровну фишек, то сумма оставшихся фишек должна быть кратна 8. Следовательно, не должно быть горизонтали, в которой 4 фишки, потому что $36 - 4 = 32 \vdots 8$.

Четвёртый тур

4.1. Решение. Пусть

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2004}{2005!}.$$

Тогда

$$S + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{2004!} + \frac{1}{2005!} = \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \ldots + \frac{2005}{2005!} = \\ = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{2004!},$$

откуда находим, что

$$S + \frac{1}{2005!} = 1.$$

Поэтому $S = 1 - \frac{1}{2005!} < 1$, что и требовалось доказать.

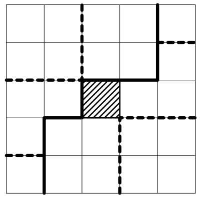

Рис. 18

4.2. Первое решение. Разрежем фигуру так, как показано на рис. 18. Жирными линиями показаны линии разреза, пунктиром — линии сгиба.

Сложим по линиям сгиба правую фигуру. Составим из неё нижнюю грань, левую грань, три клетки задней грани и одну клетку верхней грани куба. Остались передняя грань, правая грань, три клетки верхней грани и одна клетка задней грани — их мы составим из левой фигуры.

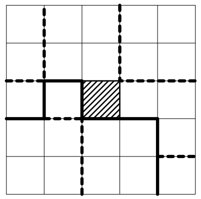

Рис. 19

Второе решение. Разрежем фигуру так, как показано на рис. 19. Из верхней фигуры мы можем составить нижнюю грань, переднюю грань, правую грань и три клетки левой грани куба. Остались верхняя и задняя грани, а также одна клетка левой грани — их мы составим из нижней фигуры.

4.3. Ответ: овражных чисел больше.

Решение. Заметим, что если x — хребтовое число, то число $999 - x$ является овражным, и наоборот. При этом первая цифра любого хребтового числа меньше девяти, поэтому соответствующее ему овражное число также трёхзначное. Поэтому овражных чисел не меньше, чем хребтовых.

Однако для овражного числа x, начинающегося с 9 (например, для числа 912), число $999 - x$ не является трёхзначным, поэтому овражных чисел больше.

2.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. Ответ: да, например, $n = 12$.

Решение. Воспользуемся формулой квадрата суммы. Подберём число n так, чтобы 2^8 было квадратом первого числа, 2^{11} — удвоенным произведением первого числа на второе, а 2^n — квадратом второго числа. Так как $2^8 = (2^4)^2$, а $2^{11} = 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6$, то $n = 2 \cdot 6 = 12$. Тогда

$$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = \left(2^4\right)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + \left(2^6\right)^2 = \left(2^4 + 2^6\right)^2 = 80^2.$$

1.2. Ответ: да, верно.

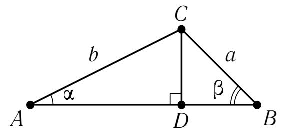

Рис. 20

Обозначим $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$. Пусть также $a = BC$ и $b = AC$.

Первое решение. Из условия следует, что косинусы углов α и β имеют одинаковый знак, поэтому эти углы острые. Проведём в данном треугольнике высоту CD (см. рис. 20). Тогда $BD = a\cos\beta = b\cos\alpha = AD$. Следовательно, CD — медиана треугольника ABC, то есть $AC = BC$.

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\cos^2\beta}{b^2}$, а из теоремы синусов — что $\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2}$. Сложим эти два уравнения и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Получим, что $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$, откуда $a = b$, так как $a, b > 0$.

1.3. Ответ: нет, не может.

Первое решение. Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на чётных местах, и суммы цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11. В данном случае эта разность равна 0, поэтому данное число делится на 11 и не является простым.

Второе решение. Докажем, что данное число делится на 11, не используя признак делимости. Пусть наше число имеет вид

$$S = \overline{a_0a_1\ldots a_{48}a_{49}a_{49}a_{48}\ldots a_1a_0}.$$

Тогда его можно записать в виде суммы

$$S = a_0(10^{99} + 1) + a_1(10^{98} + 1) + \ldots + a_{49}(10^{50} + 10^{49}) = \\ = \sum_{n=0}^{49} a_n(10^{99-n} + 10^n) = \sum_{n=0}^{49} a_n \cdot 10^n \cdot (10^{99-2n} + 1).$$

По теореме Безу при любом нечётном k число $x^k + 1$ делится на $x + 1$, откуда следует, что каждое слагаемое делится на 11. Следовательно, и вся сумма делится на 11, а значит, число S не является простым.

Второй тур

2.1. См. задачу 3.1 Математической регаты 6–7 классов.

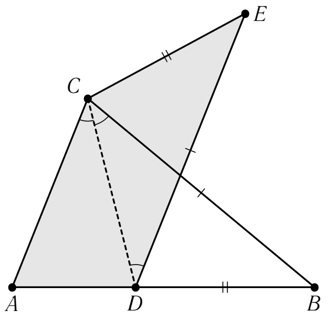

Рис. 21

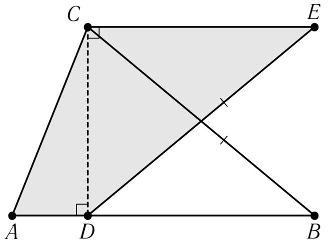

Рис. 22

2.2. Ответ: в обоих случаях — можно.

Решение.

а) Разрежем данный треугольник ABC по одной из биссектрис, например, по биссектрисе CD (см. рис. 21). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведённой биссектрисе и получим треугольник ECD. Так как $\angle ACD = \angle CDE$, то $AC \parallel DE$, то есть $ACED$ — трапеция с основаниями AC и DE $(= BC)$.

б) Разрежем данный треугольник ABC по высоте, лежащей внутри треугольника (хотя бы одна такая высота найдётся, например, CD, см. рис. 22). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведённой высоте и получим треугольник ECD. Так как $\angle ADC = \angle DCE = 90°$, то $AD \parallel CE$, то есть $ACED$ — трапеция с боковыми сторонами AC и DE $(= BC)$.

Отметим, что поскольку данный треугольник не является равнобедренным, то в обоих случаях получается трапеция, а не параллелограмм.

2.3. Ответ: для всех k, таких что $n \leqslant k \leqslant 2n$.

Решение. Очевидно, что наиболее экономный способ — расставить светильники по всем углам, тогда их будет ровно n; а наименее экономный — поставить по два светильника к каждой стенке, не занимая углы, тогда их будет ровно $2n$.

Для всех k, таких что $n < k < 2n$, указанная расстановка также возможна. Действительно, можно расставить по одному светильнику в $2n - k$ последовательных вершинах многоугольника, а около остальных $k - n$ вершин (но не в них) поставить по одному светильнику с каждой стороны. Тогда всего будет $(2n - k) \cdot 1 + (k - n) \cdot 2 = k$ светильников, и у каждой стенки будет стоять ровно два светильника.

Третий тур

3.1. См. задачу 4.1 Математической регаты 6–7.

3.2. Ответ: две, одна или ни одной.

Решение. Легко привести пример многоугольника, у которого нет ни одной стороны, равной наибольшей диагонали — достаточно взять любой правильный многоугольник.

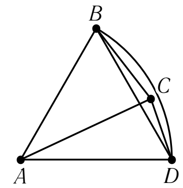

Рис. 23

Также несложно привести пример многоугольника, в котором одна или две стороны равны наибольшей диагонали. Рассмотрим, например, дугу BD величиной в 60° с центром в точке A (см. рис. 23). Выберем точку C между этой дугой и хордой BD, тогда BD — бóльшая диагональ четырёхугольника $ABCD$ и $AB = AD = BD$. Если немного уменьшить сторону AD, оставив треугольник ABD равнобедренным, то BD — бóльшая диагональ и $AB = BD$.

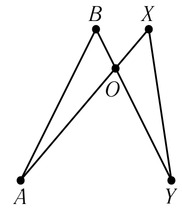

Рис. 24

Докажем, что сторон, равных наибольшей диагонали многоугольника, не может быть больше двух. Предположим, что их хотя бы три, тогда среди них найдутся две стороны, не имеющие общих точек, которые обозначим AB и XY. Четырёхугольник $ABXY$ выпуклый, поэтому его диагонали AX и BY, являющиеся также и диагоналями многоугольника, пересекаются в точке O (см. рис. 24). Применяя неравенство треугольника для треугольников AOB и XOY, получим:

$$\begin{cases} AO + OB > AB, \\ XO + OY > XY. \end{cases}$$

Сложим эти два неравенства, получим $AX + BY > AB + XY$. Следовательно, по крайней мере одна из диагоналей AX или BY больше, чем наибольшая диагональ многоугольника.

Полученное противоречие доказывает, что сторон, равных наибольшей диагонали, не более двух, причём они могут быть только соседними!

3.3. Ответ: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Решение. Поскольку уравнение симметрично относительно x, y, z, можно считать, что $x \leqslant y \leqslant z$, а остальные тройки получаются всевозможными перестановками чисел x, y, z. Тогда $3xy + 3yz + 3zx \leqslant 9yz$, а $5xyz + 3 > 5xyz$. Следовательно, $5xyz < 9yz$, откуда $x = 1$. Исходное равенство принимает вид: $3y + 3z = 2yz + 3$. Так как $3y + 3z \leqslant 6z$, а $2yz + 3 > 2yz$, то $2yz < 6z$, откуда следует, что $y < 3$. Если $y = 1$, то из равенства $3y + 3z = 2yz + 3$ следует, что $z = 0$, что невозможно. Остаётся единственная возможность $y = 2$, тогда из равенства $3y + 3z = 2yz + 3$ получаем, что $z = 3$.

Четвёртый тур

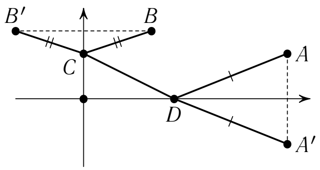

Рис. 25

4.1. Ответ: 13.

Решение. Введём на плоскости систему координат и рассмотрим точки $A(9,2)$, $B(3,3)$, $C(0,y)$, $D(x,0)$. Тогда $L(x,y) = AD + DC + CB$ (см. рис. 25). Таким образом, данное выражение принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда длина ломаной $ADCB$, концы которой фиксированы, а точки D и C находятся на указанных осях координат, будет наименьшей.

Рассмотрим точку $A'(9,-2)$, симметричную точке A относительно оси абсцисс, и точку $B'(-3,3)$, симметричную точке B относительно оси ординат. Получим, что $AD + DC + CB = A'D + DC + CB'$, поэтому наименьшее значение такой суммы равно длине отрезка $A'B'$. Оно достигается, если точки C и D лежат на этом отрезке. Осталось вычислить длину отрезка $A'B'$:

$$A'B' = \sqrt{(-9-3)^2 + (-2-3)^2} = 13.$$

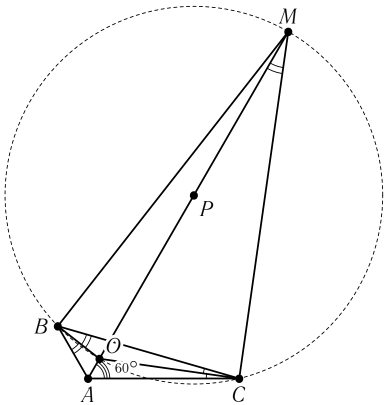

Рис. 26

4.2. Ответ: $OM = 6$.

Решение. Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\angle CBA$, $\beta = \frac{1}{2}\angle BCA$ (см. рис. 26). Так как $\angle BAC = 120°$, то $\alpha + \beta = 30°$, $\angle BOC = 150°$. По свойству вписанных углов, $\angle AMC = \angle OBC = \alpha$. Запишем выражение для суммы углов треугольника AMC: $60° + \alpha + 2\beta + \angle BCM = 180°$. Отсюда с учётом равенства $\alpha + \beta = 30°$ получим $\beta + \angle BCM = 90°$, то есть $\angle OCM = 90°$. Следовательно, OM — диаметр окружности.

По следствию из теоремы синусов для треугольника BOC, получаем $OM = 2R = \frac{BC}{\sin\angle BOC} = \frac{3}{\sin 150°} = 6$.

4.3. Ответ: чётных отрезков больше.

Решение. Рассмотрим прямую, на которой лежит не менее двух точек. Докажем по индукции, что на этой прямой чётных отрезков больше, чем нечётных. Если точек две, то единственный отрезок является чётным. Пусть для k точек утверждение верно. Добавим к ним ещё одну точку так, чтобы остальные точки лежали по одну сторону от неё. Тогда образуется k новых отрезков. Если k чётно, то половина из них чётные, а другая половина — нечётные. Если k нечётно, то чётных отрезков образуется на один больше, чем нечётных. Видим, что в обоих случаях чётных отрезков добавляется не меньше, чем нечётных. Следовательно, утверждение верно для $k + 1$ точки.

Доказанное утверждение верно для каждой прямой, содержащей хотя бы две отмеченные точки, из чего и следует утверждение задачи.

2.2. Математические бои

2.2.1. Первый тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: да, могло, например, если Гриша нашёл числа 22 и 10.

2. Ответ: выигрывает Снегурочка.

Решение. У Снегурочки есть выигрышная стратегия. Первым ходом она стирает четыре буквы «Е». Остальные буквы расположим так:

БРДВЫЫ|ННПОЛЯ

На каждый ход Берендея Снегурочка стирает буквы, расположенные в этой схеме симметрично.

3. Ответ: две ладьи.

Решение. Если поставить только одну ладью, то доску заполнить не удастся (ведь по условию нужно, чтобы под боем находилось не менее двух ладей). Покажем, что двух ладей достаточно. Поставим их в противоположные углы шахматной доски. После этого можно поставить по ладье в оставшиеся углы, далее заполнить все клетки по краю доски, а потом и всю остальную доску.

4. Решение. На пятом острове аисты не могли съесть больше чем по одной лягушке, так как в противном случае каждый аист съел не меньше двух, а, значит, всего было съедено не меньше 60 лягушек.

Так как каждый аист съел хотя бы по одной лягушке, посчитаем их трапезы за вычетом одной лягушки. Тогда на пятом острове аисты не съели ничего, на четвёртом съели хотя бы по одной, на третьем — хотя бы по две, на втором — хотя бы по три, и на первом — хотя бы по четыре лягушки. Всего было съедено 12 лягушек.

Пусть на пятом острове завтракали 26 аистов. Остальные четверо завтракали по одному на каждом острове, на их долю приходится 12 лягушек, и каждый съел разное количество. Легко проверить, что $12 = 1 + 2 + 3 + 6$ и $12 = 1 + 2 + 4 + 5$, а других вариантов нет.

Пусть на пятом острове завтракали 25 аистов. Оставшиеся пятеро съели 12 лягушек, причём только двое из них съели по одинаковому количеству лягушек. Несложный перебор показывает, что $12 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5$ и $12 = 1 + 2 + 2 + 3 + 4$, а других вариантов нет.

Пусть на пятом острове завтракали 24 аиста. Поделим 12 лягушек между оставшимися шестью. Пусть каждый съел минимально возможное количество, тогда $12 = 1+1+1+2+3+4$. Если увеличить трапезу хотя бы одному из аистов, получится больше двенадцати, поэтому приведённый вариант — единственный.

Меньше 24 аистов на пятом острове быть не может, так как даже если семь аистов на четырёх первых островах съедят минимально возможное количество лягушек, получится $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 13$, а у нас есть только 12 лягушек. Тем более не может быть на первых четырёх островах больше семи аистов.

Таким образом, все возможные случаи разобраны. Добавим каждому аисту по одной неучтённой лягушке и получим ответ: в первом случае либо $26 + 2 + 3 + 4 + 7$, либо $26 + 2 + 3 + 5 + 6$; во втором случае либо $25 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 6$, либо $25 + 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5$; в третьем случае — $24 + 3 \cdot 2 + 3 + 4 + 5$.

5. Ответ: 1 *ч* 36 *мин*.

Решение. Пусть свечи горели x часов. Тогда сгорело $\frac{x}{4}$ толстой свечи и $\frac{x}{2}$ тонкой. Так как огарок толстой свечи в три раза длиннее тонкой, можно составить уравнение $1 - \frac{x}{4} = 3 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Решив его, получим $x = 1{,}6$.

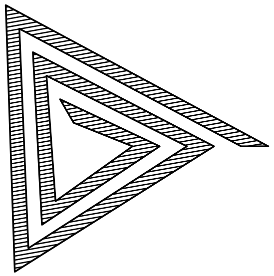

Рис. 27

6. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Остров может иметь форму невыпуклого многоугольника, например, такую, как показано на рис. 27.

Комментарий. Аналогичным образом можно построить многоугольник с любым количеством острых углов, идущих подряд.

7. Ответ: 3725.

Решение. Разобьём числа на пары, дающие в сумме 100. Получим 49 пар и отдельное число 50. Из каждой пары может быть выбрано только одно число, поэтому число 50 обязательно присутствует. Значит, число $49 = 99 - 50$ не может быть выбрано, поэтому выбрано парное

ему число 51. Значит, отсутствует число 48, следовательно, присутствует парное ему число 52. Аналогично, не может быть выбрано 47, поэтому выбрано 53. Продолжая рассуждения, получаем, что выбраны числа: $50, 51, 52, 53, \ldots, 99$. Их сумма равна 3725.

8. Ответ: нет, не удастся.

Решение. Имеем $\overline{МЯУМЯУ} = \overline{МЯУ} \cdot 1000 + \overline{МЯУ} = 1001 \cdot \overline{МЯУ}$. Так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то есть не содержит квадратов, то a^2 должно делиться на 1001^2. Но это невозможно, поскольку

$$1001^2 > 1000000 > \overline{МЯУМЯУ}.$$

Высшая Лига 7

1. Ответ: Да, могло. Например, Гриша мог получить числа $22, 10, \ldots, 10$.

2. Ответ: 10 ладей.

Решение. Расставим 10 ладей следующим образом: 4 ладьи по углам и 6 ладей на одной из диагоналей (см. рис. 28). Легко видеть, что при такой расстановке можно сначала заполнить ладьями все граничные клетки доски, а потом заполнить все остальные клетки. Покажем, что меньшим количеством ладей обойтись нельзя. В самом деле, в углах доски ладьи обязаны стоять, поскольку ладья, стоящая в углу, угрожает не более чем двум ладьям. Осталось 6 пустых вертикалей и горизонталей. Если на какой-нибудь горизонтали не будет ни одной ладьи, то на эту горизонталь нельзя поставить ни одной ладьи. Значит, на каждой вертикали и каждой горизонтали должна быть хотя бы одна ладья.

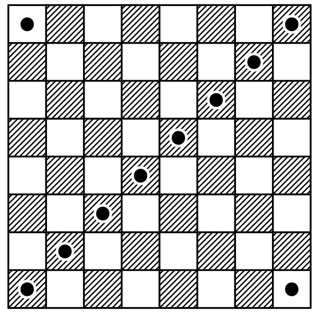

Рис. 28

3. Ответ: $x = 88$.

Решение. Полный квадрат с двумя или более одинаковыми последними цифрами может оканчиваться только на 44 или 00 (подробное доказательство этого факта приведено в решении задачи 3 Высшей Лиги 8–9). Таким образом, $z = 4$, поэтому

$$x^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n} \cdot (10^n \cdot y + 4).$$

Пусть $n \geqslant 4$. Разделим полученное равенство на 4:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n} \cdot (25 \cdot 10^{n-2} \cdot y + 1).$$

Теперь возьмём остаток по модулю 4. Получим

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \equiv 3 \cdot 1 \pmod 4.$$

Таким образом, квадрат целого числа имеет остаток 3 при делении на 4. Но это невозможно, поэтому при $n \geqslant 4$ решений нет.

Рассмотрим случай $n = 3$. Тогда $x^2 = 111 \cdot (1000y + 4)$. Поскольку $111 = 3 \cdot 37$, а слева стоит полный квадрат, необходимо, чтобы число $1000y + 4$ делилось на 111. Но отсюда следует, что $(y+4) \vdots 111$, а это невозможно, поскольку y — цифра. Итак, в этом случае также нет решений.

Разберём случай $n = 2$. Тогда $x^2 = 11 \cdot (100y+4)$, поэтому $(y+4) \vdots 11$, откуда $y = 7$. Получаем уравнение $x^2 = 7744$, откуда $x = 88$.

4. Решение. Сумма чисел $(m_1 - 1), (m_2 - 2), \ldots, (m_{100} - 100)$ равна нулю. Поэтому сумма модулей положительных чисел из этого набора равна сумме модулей отрицательных чисел. Положив гирьки, соответствующие этим двум наборам чисел, на разные чашки весов, получим равновесие.

5. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

6. Ответ: на гирлянде из 97 лампочек можно зажечь 95 лампочек.

Решение. Мы решим эту задачу в общем случае, для гирлянды из n лампочек. Нам будет удобно нумеровать лампочки с нуля: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Будем двигаться вправо от нулевой лампочки по связанным с ней. Мы отметим лампочки с номерами, кратными 12: $0, 12, 24, \ldots$ Зафиксируем момент, когда мы впервые попадём снова в лампочку с номером 0. Выясним, сколько шагов нам на это потребуется. С одной стороны, мы идём шагами длиной 12, с другой стороны, мы сделали целое число оборотов по n. Ясно, что первый раз это случится, когда мы пройдём расстояние НОК$(12, n)$. При этом будет отмечено $m = \frac{\text{НОК}(12,n)}{12}$ лампочек. Поскольку

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)},$$

получаем, что

$$m = \frac{12n}{\text{НОД}(12, n) \cdot 12} = \frac{n}{\text{НОД}(12, n)}.$$

Если в гирлянде остались неотмеченные лампочки, то берём любую из них и аналогично станем получать другую цепочку, то есть пойдём шагами длиной в 12 лампочек, пока опять не придём в точку старта. Понятно, что эта цепочка не пересечётся с первой и что в ней тоже

будет m лампочек. Продолжим процесс разделения на цепочки, пока все лампочки не будут исчерпаны. Всего цепочек будет, очевидно, $\frac{n}{m} = \text{НОД}(12, n)$.

Зачем нам такое разделение на цепочки? Дело в том, что лампочки в разных цепочках никак не могут повлиять друг на друга. А в одной цепочке связанные лампочки становятся как бы соседними. Применим результат аналогичной задачи 6 Первой Лиги 8–9. Получим, что в каждой цепочке длины m можно зажечь $m - 2$ лампочки. Значит, во всей гирлянде мы не сможем зажечь $n - \text{НОД}(12, n) \cdot 2$ лампочки.

Осталось применить эту формулу. При $n = 100, 99, 98$ потери слишком велики, а при $n = 97$ цепочка всего одна, поэтому мы потеряем всего 2 лампочки. Итак, нужно купить гирлянду из 97 лампочек.

7. Ответ: можно.

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон нашего треугольника. Если $a = c$, то разбиение показано на рис. 29, где отмечены AB и BC, а точка D выбрана произвольно внутри отрезка AC. Если же $a > c$, то разбиение показано на рис. 30, где отмечены AB и CD.

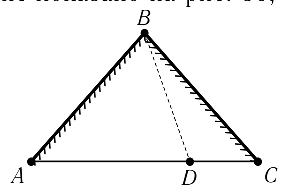

Рис. 29

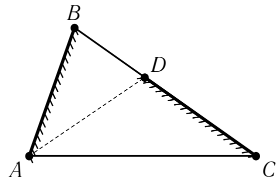

Рис. 30

8. Решение. Углы ABK и CBL равны как соответствующие углы в равных треугольниках, поэтому $\angle KLB = \angle ABC = 60°$ (см. рис. 31). Поскольку $BK = BL$, треугольник BKL равносторонний. Из условия следует, что треугольник AKM равносторонний, поэтому $\angle AKM = 60°$. Из равенства треугольников ABK и MBK следует равенство углов AKB и MKB, а потому каждый из них равен 150°. Следовательно, $\angle MKL = 150° - 60° = 90°$. Поскольку $\angle AMK = 60°$ и $\angle KLB = 60°$, аналогично получаем, что $\angle CMK = 150° - 60° = 90°$ и $\angle KLC = 150° - 60° = 90°$. Итак, у четырёхугольника $CKLM$ три прямых угла, следовательно, это прямоугольник.

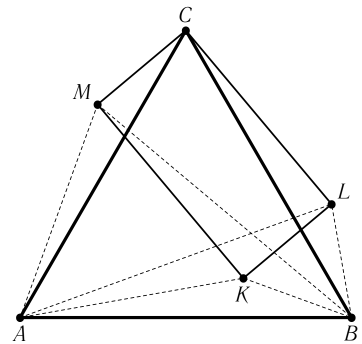

Рис. 31

Первая Лига 8–9

1. Ответ: да, например, числа вида 10^k, где $k = 0, \ldots, 9$.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. См. задачу 8 Первой Лиги 6–7.

4. Решение. Заменим во всех знаменателях левой части числа x_i на их сумму S. От этого сумма только уменьшится. Осталось заметить, что новая сумма в точности равна правой части.

Комментарий. Задача также может быть решена методом математической индукции.

5. Решение. Заметим сначала, что все числа в последовательности являются положительными. Действительно, если в числе всего одна цифра, то повторяющихся цифр в нём нет, и, в соответствии с правилами построения последовательности, следующее число будет больше. Самое маленькое число с повторяющимися цифрами — это 11, значит, после него появится число 9, но оно однозначное, значит, следующее число будет больше. Мы видим, что отрицательных чисел получить нельзя.

Покажем, что в этой последовательности существует лишь конечное число членов, в которых количество цифр больше 11. В самом деле, если в числе больше 10 цифр, то в нём обязательно будут повторяющиеся цифры, значит, цепочка будет убывать. Это будет происходить как минимум до тех пор, пока число не станет 10-значным. Теперь посмотрим, насколько далеко мы после этого сможем уйти от самого большого 10-значного числа. Если в числе нет одинаковых цифр, то максимум того, что мы сможем из него получить, не превосходит $(10^{10}-1)+10$. Если после прибавления мы получим 11-значное число, то дальше опять будем скатываться вниз, пока не получим 10-значного числа. В любом случае, если мы хотя бы один раз получили не более чем 10-значное число, мы никогда не получим ничего более $(10^{10} - 1) + 10$. Отсюда следует, что наша (бесконечная) последовательность является ограниченной. По принципу Дирихле в ней обязательно найдутся два одинаковых члена. Поскольку каждый следующий член нашей последовательности определяется только предыдущим, начиная с этого момента последовательность начнёт периодически повторяться.

6. Решение. Наибольшее количество лампочек, которые можно зажечь таким способом, равно $n-2$. Покажем, что большее количество зажечь не удастся. Будем действовать от противного. Зафиксируем *первый* момент, когда удалось зажечь $n-1$ лампочку. Обозначим последнюю негорящую лампочку через A. Ясно, что в этом случае лампочка B, которая зажглась последней, соседствует с A, потому что все остальные имеют по два горящих соседа. Пусть, для определённости, B находится справа от A. Когда она зажигалась, должна была погаснуть именно лампочка A, иначе должна была бы погаснуть лампочка справа от B, а она горит. Но это означает, что перед включением лампочки B постоянно горела $n-1$ лампочка, что противоречит тому, что мы выбрали первый момент.

Можно было бы рассуждать и иначе. Количество зажжённых лампочек на каждом шаге возрастает не более, чем на 1, значит, будет момент, когда горят $n-2$ лампочки. У каждой из оставшихся двух негорящих лампочек хотя бы одна из соседних включена. Значит, при попытке включить одну из негорящих лампочек одну из горящих придётся погасить, то есть количество зажжённых лампочек не увеличится.

Покажем теперь, как зажечь $n-2$ лампочки. Пусть лампочки с номерами $1, 2, \ldots, k$ уже горят. Зажигаем лампочку $k+2$ (при этом ни одна из лампочек не погаснет). Далее зажигаем лампочку $k+1$, а лампочку $k+2$ гасим. После этих двух операций получаем цепочку $1, 2, \ldots, k+1$, состоящую из горящих лампочек. Эту процедуру можно продолжать, пока не будут зажжены лампочки с номерами $1, 2, \ldots, n-2$.

7. Решение. Упорядочим углы: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда треугольник остроугольный, центр O описанной окружности лежит внутри него, и разбить можно так, как показано на рис. 32 (штриховкой отмечена принадлежность стороны треугольника).

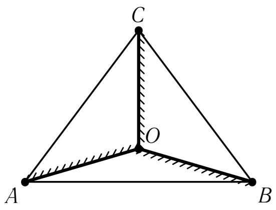

Рис. 32

Пусть $\alpha > \beta$. Рассмотрим трёхзвенную ломаную $BDEA'$ с равными звеньями и проведём из A' луч ℓ, как показано на рис. 33. Так как $\alpha > \beta = \angle BED$, то ℓ не пересечёт отрезок ED. Таким образом, ломаная оказалась внутри

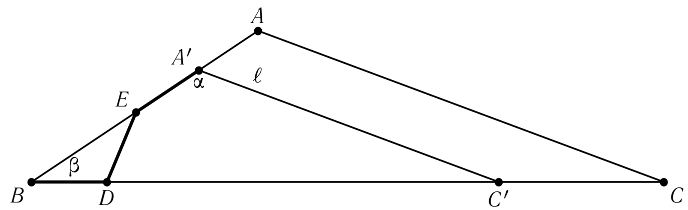

Рис. 33

треугольника $BA'C'$, где C' — точка пересечения луча ℓ с прямой BD. Переведём с помощью гомотетии треугольник $BA'C'$ в треугольник BAC (см. рис. 34). При этом преобразовании ломаная $BDEA'$ перейдёт в ломаную BD_1E_1A. Она разбивает треугольник BAC на три треугольника, которые удовлетворяют условию задачи (см. рис. 35).

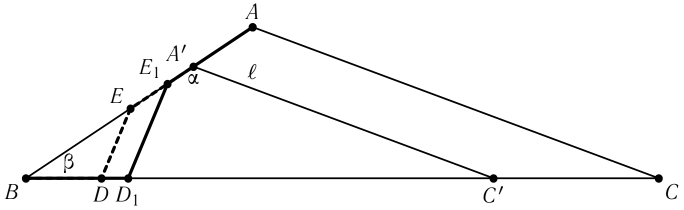

Рис. 34

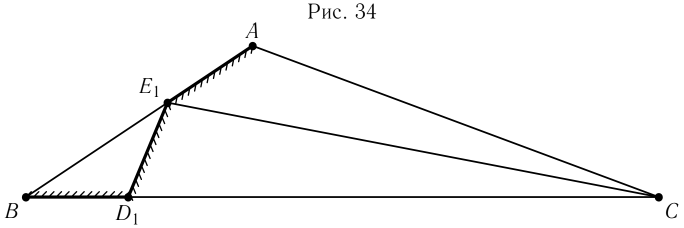

Рис. 35

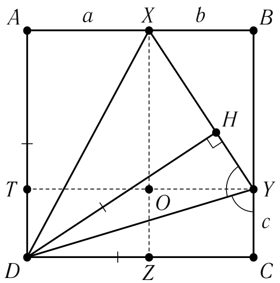

Рис. 36

8. Решение. Проведём высоту DH в треугольнике DYX (см. рис. 36). Прямоугольные треугольники DCY и DHY равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $DH = DC$. Отрезки AD и DC равны как стороны квадрата, поэтому треугольники DHX и DAX равны по гипотенузе и катету.

Обозначим $a = AX$, $b = XB$, $c = CY$. Посчитаем площадь квадрата двумя способами. С одной стороны, она равна $S = (a+b)^2$. С другой стороны, она складывается из площадей пяти прямоугольных треугольников:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}a(a+b) + 2 \cdot \frac{1}{2}c(a+b) + \frac{1}{2}b(a+b-c).$$

Приравнивая два выражения для S и упрощая их, получаем

$$b(a+b-c) = 2ac.$$

Имеем $S_{ZDTO} = ac$ и $S_{XBYO} = b(a+b-c) = 2ac$, как следует из полученного выше равенства. Но это и означает, что $S_{XBYO} = 2S_{ZDTO}$.

Высшая Лига 8–9

1. Ответ: при любых n.

Решение. Возьмём, например, числа вида 10^k, где $k = 0, \ldots, n-1$.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Ответ: $x = \pm 880$.

Решение. Решим вспомогательную задачу. Рассмотрим натуральное число $n \geqslant 10$. Пусть у числа n^2 две последние цифры совпадают. Выясним, какие они могут быть. Разделим n на 10 с остатком: $n = 10m + r$. Тогда $n^2 = (10m+r)^2 = 100m^2 + 20mr + r^2$. Первое слагаемое не влияет на последние две цифры. Слагаемое $20mr$ не влияет на разряд единиц, а к разряду десятков добавляет чётное число. Поскольку разряд единиц и разряд десятков должны совпадать, они, в частности, имеют одинаковую чётность. Разделим r^2 на 10 с остатком: $r^2 = 10q + p$. Чтобы чётности разрядов совпали, нужно, чтобы числа p и q имели одинаковую чётность. Выясним, когда это бывает:

r	**0**	1	**2**	3	4	5	6	7	**8**	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
p	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8
q	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Мы видим, что это случается при $r = 0, 2, 8$. Значит, $p = 0$ либо $p = 4$. Итак, квадрат натурального числа, две последние цифры которого совпадают, может оканчиваться либо на 00, либо на 44. В частности, $x^2 = \overline{****00}$ либо $x^2 = \overline{****44}$.

Пусть $t = 0$. Обозначим $u = \frac{x}{10}$, тогда $u^2 = \overline{yyzz}$. Мы уже знаем, что квадрат числа, у которого две последние цифры одинаковые, заканчивается либо на 00, либо на 44. Первый вариант невозможен, потому что в этом случае $\left(\frac{u}{10}\right)^2 = \overline{yy}$, что невозможно. Следовательно, $z = 4$ и потому $u^2 = 11(100y + 4)$, откуда $100y + 4 \vdots 11 \Leftrightarrow y + 4 \vdots 11$. Отсюда $y = 7$, $u = \pm 88$. Получаем $(x, y, z, t) = (\pm 880, 7, 4, 0)$.

Пусть $t = 4$, тогда $x^2 = 11(y \cdot 10^4 + z \cdot 10^2 + 4)$. Поскольку всякий простой делитель входит в квадрат в чётной степени, число в скобках делится на 11. Это означает, что и $y + z + 4 \vdots 11$. Отсюда либо $y + z + 4 = 22$, либо $y + z + 4 = 11$. В первом случае $y = z = 9$, но число 999944 не является точным квадратом.

Во втором случае $y + z = 7$. Обозначая $u = \frac{x}{11}$, получаем

$$u^2 = \frac{y \cdot 10^4 + (7-y) \cdot 10^2 + 4}{11} = 900y + 64,$$

откуда, перенося 64 в левую часть и используя формулу разности квадратов, получаем $(u-8)(u+8) = 900y$. Так как числа $u+8$ и $u-8$ имеют одинаковую чётность, а их произведение чётно, то оба числа являются чётными. Поскольку их разность не делится на 5, а произведение делится на 25, то одно из них делится на 25. Итак, одно из этих чисел делится на 50. Покажем, что это число в точности равно 50. Действительно, из неравенства $u+8 \geqslant 100$ следовало бы

$$(u+8)(u-8) \geqslant 8400 > 8100 \geqslant 900y,$$

поскольку y — цифра, и мы получили бы противоречие. Если $u+8 = 50$, то $u-8=34$, а если $u-8=50$, то $u+8=66$. Однако оба случая невозможны, потому что и в том, и в другом случае $(u-8)(u+8)$ не делится на 9.

4. См. задачу 4 Первой Лиги 8–9.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

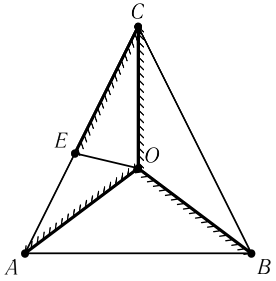

Рис. 37

7. Решение. Рассуждения будут очень похожи на те, которыми мы пользовались при решении задачи 7 Первой Лиги 8–9.

Упорядочим углы: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда треугольник остроугольный, следовательно, центр O описанной окружности лежит внутри него, и разбить можно так, как показано на рис. 37 (штриховкой отмечена принадлежность стороны треугольника).

Пусть теперь $\alpha > \beta$. Рассмотрим трёхзвенную ломаную $BDEA'$ с равными звеньями и проведём из A' луч ℓ, как показано на рис. 38. Так как $\alpha > \beta = \angle BED$, то ℓ не пересечёт отрезок ED. Таким образом, ломаная оказалась внутри

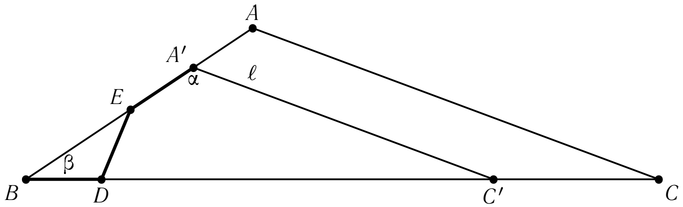

Рис. 38

треугольника $BA'C'$, где C' — точка пересечения луча ℓ с прямой BD. Переведём с помощью гомотетии треугольник $BA'C'$ в треугольник BAC (см. рис. 39). При этом преобразовании ломаная $BDEA'$ перейдёт в ломаную BD_1E_1A. Отметим на отрезке AC точку F такую, что $FC = BD_1$ (см. рис. 40). Это возможно, поскольку $CF < AB \leqslant AC$. Покажем, что прямые CF и E_1D_1 непараллельны. Допустим, что это не так. Тогда

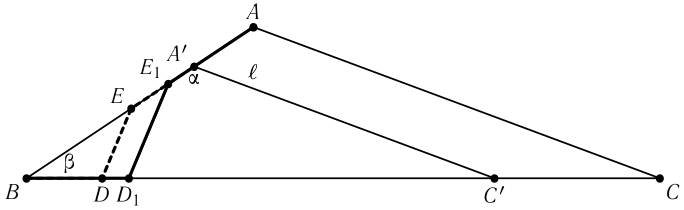

Рис. 39

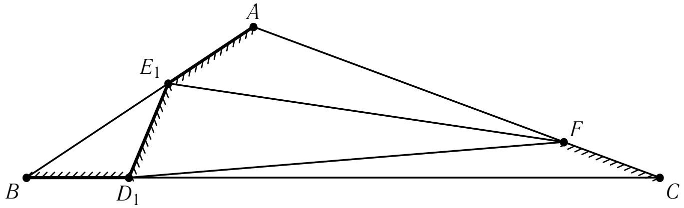

Рис. 40

$\angle D_1E_1B = \alpha$, но треугольник E_1D_1B — равнобедренный с основанием BE_1, поэтому $\beta = \angle B = \angle D_1E_1B = \alpha$, что противоречит нашему предположению. Итак, мы получили требуемое разбиение на четыре треугольника.

8. Решение. Так как вершины K, L квадрата $KLMN$ лежат на окружности (см. рис. 41), центр окружности O лежит на оси симметрии квадрата, то есть $OM = ON$. Поскольку BO — биссектриса угла MBN, то, применяя теорему синусов к треугольникам OBN и OBM, получаем $\sin\angle ONB = \sin\angle OMB$.

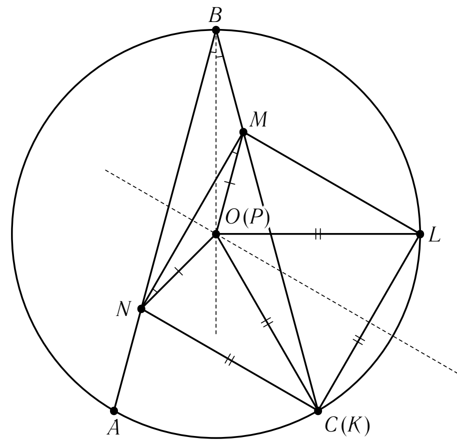

Рис. 41

Если $\angle ONB = \angle OMB$, то прямая OB является осью симметрии квадрата, что невозможно, так как K лежит на дуге AC, а L — нет. Отсюда следует, что $\angle ONB + \angle OMB = 180°$, то есть четырёхугольник $OMBN$ вписанный, и $\angle ONM = \angle OMN = \angle OBM = 15°$.

Построим равносторонний треугольник KLP. Так как $\angle NKP = 30°$ и $NK = KP$, то $\angle PNK = 75°$ и $\angle PNM = 15°$. Аналогично, $\angle PMN = 15°$. Значит, точки P и O совпадают, и $OK = KL$.

2.2.2. Второй тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: 22 перчатки.

Решение. Покажем, что 22 перчаток достаточно. Вытащим 5 левых и 17 правых перчаток. Если среди вынутых левых перчаток нашлись белые, то пара найдётся, поскольку среди правых перчаток обязательно будет хотя бы одна белая. Пусть теперь не вынуто ни одной белой левой перчатки. Тогда среди левых будут и синие, и красные перчатки. Но среди 17 правых всегда найдётся либо красная, либо синяя. Значит, одноцветная пара всегда найдётся.

Теперь покажем, что меньшим количеством обойтись нельзя. Пусть мы вытаскиваем L левых перчаток и R правых, причём $L+R=21$. Если $4 \leqslant R \leqslant 16$, то все правые перчатки могут оказаться не белыми, а среди левых могут, напротив, попасться лишь белые. Если $17 \leqslant R \leqslant 20$, то у нас есть шанс не вытащить ни одной правой красной перчатки, а среди не более четырёх левых перчаток может не оказаться ни одной красной перчатки. Если же $1 \leqslant R \leqslant 3$, то это могут быть, например, только красные перчатки, а среди не более 20 левых могут попасться только белые и синие. Этими тремя случаями исчерпываются варианты разбиения числа 21 на натуральные слагаемые, и в каждом случае может получиться так, что одноцветной пары не будет. Значит, 21 перчаткой обойтись нельзя.

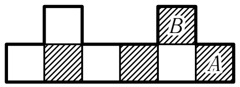

Рис. 42

2. Решение. Нет, неверно. Рассмотрим, например, фигуру, изображённую на рис. 42. В ней 4 белых и 4 чёрных клетки. Покажем, что 4 доминошки на ней разместить нельзя. В самом деле, нельзя положить доминошки так, чтобы одновременно были покрыты клетки A и B, а 4 доминошки — это уже 8 клеток, значит, свободных клеток быть не может.

3. Ответ: от 5 до 14 городов.

Решение. Докажем, что меньше 5 городов быть не может. Пусть у нас есть 4 города. Соединив каждый город с каждым дорогами, получим всего 6 дорог. Очевидно, что при меньшем количестве городов дорог будет ещё меньше.

Докажем оценку сверху. Каждая дорога соединяет два города, поэтому семь дорог соединяют не более 14 городов.

Примеры для 5, 6, 7 и 8 городов показаны на рис. 43—46. Покажем, как получить все остальные. Возьмём цепочку из 8 городов и будем проводить следующую операцию: отсоединяем крайний город от цепочки (пропадает одна дорога), ставим на карту ещё один дополнительный

город и соединяем его дорогой с только что отсоединённым городом (количество дорог становится прежним). Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не останется 7 пар городов (см. рис. 47—49).

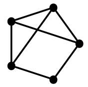

Рис. 43

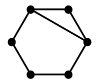

Рис. 44

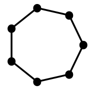

Рис. 45

Рис. 46

Рис. 47

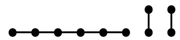

Рис. 48

...

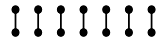

Рис. 49

4. Ответ: да, смогут.

Первое решение. Легко посчитать, что Ксюша потратила на шоколадки 72 рубля, а Наташа — 54 рубля. Поскольку каждая купила целое число шоколадок, цена одной шоколадки является общим делителем чисел 72 и 54. $\text{НОД}(72, 54) = 18$, поэтому цена шоколадки не больше, чем 18. Поскольку у девочек как раз осталось 18 рублей, то ещё одну шоколадку они смогут купить.

Второе решение. Поскольку Ксюша купила целое число шоколадок, и Наташа купила целое число шоколадок, разность потраченных ими денег должна делиться на цену шоколадки. А разность потраченных ими денег — 18 рублей, что как раз равно оставшимся у них деньгам. Поэтому девочки смогут купить ещё хотя бы одну шоколадку.

5. Ответ: да, сможет.

Решение. Снегурочка может получить 2005 крестиков следующим образом. Первые 2^{2005} ходов она ставит одиночные крестики. Берендей сможет стереть только половину их них, поэтому на полоске будет 2^{2004} крестиков. После этого Снегурочка рисует крестики рядом с уже стоящими. Берендей стирает половину их них, остаётся 2^{2003} групп из двух крестиков. Затем Снегурочка ставит крестики рядом с уже стоящими, получая группы из трёх крестиков. Так как Берендей сотрёт половину, останется 2^{2002} группы, и т. д. В какой-то момент на полоске будет 1 группа из 2005 крестиков.

6. Ответ: Андрей живёт на четвёртом этаже.

Решение. Пусть Андрей живёт на этаже с номером x. Тогда между первым этажом и этажом Андрея $x-1$ этаж, между первым этажом и этажом Жени $4(x-1)$, между первым этажом и этажом Пети $\frac{4(x-1)}{3}$ этажей. Поскольку Петя живёт на этаж выше Андрея, можно составить уравнение: $x-1+1=\frac{4(x-1)}{3}$. Решив уравнение, получим ответ задачи.

7. Ответ: да, можно.

Решение. Пусть между числами 1 и -5 было записано число x. Зная одно из чисел и сумму, можно определить и второе число, поэтому получаем такую табличку:

Номер числа	Число
1	x
2	$-5-x$
3	$5-(-5-x)=10+x$
4	$22-(10+x)=12-x$
5	$9-(12-x)=x-3$
6	$-1-(x-3)=2-x$
7	$3-(2-x)=1+x$
1	$1-(1+x)=-x$

Приравнивая первую и последнюю строку этой таблицы, получаем уравнение $x=-x$, откуда $x=0$. Теперь легко найти искомые числа. Это числа 0, -5, 10, 12, -3, 2, 1.

8. Ответ: 350 *км*.

Решение. Поскольку за одно и то же время Григорий Вячеславович проезжает 50 *км*, а автобусы — 40, значит, скорость машины в $\frac{50}{40}=$ $=1{,}25$ раз больше скорости автобусов. Пусть от Москвы до Костромы x *км*, а скорость движения автобусов равна v *км/ч*. В то время как автобусы проехали $x-70$ *км*, Григорий Вячеславович проехал x *км*. Следовательно, можно составить уравнение: $\frac{x}{1{,}25v}=\frac{x-70}{v}$. Решив его, получаем ответ.

Высшая Лига 7

1. Ответ: нет, не могут.

Решение. Поскольку гномов всего 5, то либо для красного, либо для синего, либо для зелёного цвета майку такого цвета носит всего один гном. Этот гном не может быть ни Сеней, ни Вовой, ни Гришей, поскольку известно, что если удалить каждого из них, то среди оставшихся найдутся гномы в майке и синего, и красного и зелёного цветов. Поэтому этот гном — либо Миша, либо Дима. А значит, у Миши и Димы майки разных цветов.

Заметим, что цветов маек у гномов могло быть и больше трёх, например, они могли быть такими:

Сеня	фиолетовая
Гриша	красная
Вова	красная
Дима	зелёная
Миша	синяя

2. Ответ: 20 клеток.

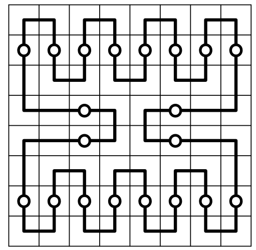

Рис. 50

Решение. Покажем сначала, как можно прокатить кубик так, чтобы на доске осталось 20 красных отпечатков. Путь кубика изображён линией, точками — клетки, в которых красная грань касалась доски (см. рис. 50).

Теперь покажем, что нельзя получить более 20 клеток. В процессе перекатывания кубик посетил 64 клетки. Будем называть клетки, на которых кубик стоял красной гранью вниз, *красными*, а остальные — *синими*. Понятно, что красные клетки не могли встречаться на пути кубика ни подряд, ни через одну. Таким образом, между любыми красными клетками на пути кубика будет хотя бы две синие. Если красных клеток хотя бы 22, то между первой и второй из них в пути кубика встретятся хотя бы две синие, между второй и третьей встретятся хотя бы две синие, и так далее, и между последней красной и первой встречаются хотя бы две синие. Значит, всего в пути встретятся хотя бы $2\cdot 22=44$ синие клетки, и всего клеток будет не менее 66, что невозможно. Значит, всего красных клеток не более 21.

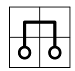

Рис. 51

Допустим, что существует путь кубика, в котором 21 красная клетка. Заметим, что если между двумя красными клетками на пути кубика встречаются две синие, то мы путешествовали «буквой П» (см. рис. 51). Посмотрим, могли ли мы так путешествовать около углов доски. Левый нижний угол мы могли обойти следующим образом: **b1**, **a1**, **a2**, **b2** или **a2**, **a1**, **b1**, **b2** (или по этим же путям, но в обратном порядке). Эти варианты обхода показаны на рис. 52 и 53.

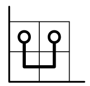

Рис. 52

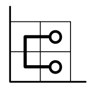

Рис. 53

Но тогда после клетки **b2** мы не сможем начать новую «букву П». Значит, около левого нижнего угла будут две красные клетки, между которыми мы путешествовали не «буквой П». Значит, будут две последовательные красные клетки около левого нижнего угла, между которыми будут хотя бы 3 синих. Аналогично для остальных трёх углов. Итак, если всего 21 красная клетка, то между соседними из них 21 промежуток, и из них хотя бы 4 промежутка содержат хотя бы 3 синие клетки, а остальные содержат хотя бы по 2 синие клетки. Значит, всего синих клеток хотя бы 46, то есть всего клеток не менее $21+46=67$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и красных клеток не более 20.

3. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

4. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

5. Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Возьмём, например, два равнобедренных треугольника со сторонами 4, 4, 2 и 5, 3, 3. Они удовлетворяют условию задачи, потому что $4+4=5+3$ и $4+2=3+3$.

6. Ответ: $15 \leqslant n \leqslant 200$.

Решение. Сначала докажем, что больше 200 городов получиться не может. У каждой дороги два конца, поэтому если всего 100 дорог, то городов может получиться не более $2 \cdot 100 = 200$.

Допустим, что число городов равно $n < 15$. Мы можем получить не больше дорог, чем рёбер в полном графе на n вершинах. Их количество легко посчитать — это количество сочетаний из n по 2, то есть $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. При $n = 14$ получаем $C_n^2 = 7 \cdot 13 = 91 < 100$, то есть 100 дорог провести не удастся.

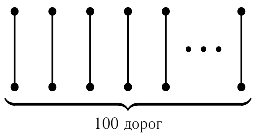

Рис. 54

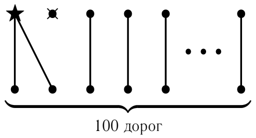

Рис. 55

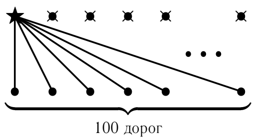

Рис. 56

Покажем теперь, что можно реализовать любое число городов n, удовлетворяющее неравенству $15 \leqslant n \leqslant 200$.

Пусть $n \geqslant 101$. Сначала построим пример для $n = 200$ (см. рис. 54). Первый город в верхнем ряду обозначим звёздочкой и будем называть его *столицей*. Теперь будем производить следующую операцию. Берём первый незачёркнутый город в верхнем ряду, не совпадающий со столицей, зачёркиваем его, а дорогу, которая шла из соответствующего нижнего города, соединяем со столицей (см. рис. 55). При этом количество городов уменьшается на единицу, а количество дорог сохраняется. Так можно продолжать, пока в верхнем ряду не останется одна столица, а все остальные города верхнего ряда будут зачёркнуты (см. рис. 56). Таким образом, мы показали, что можно получить любое количество городов от 101 до 200.

Теперь покажем, как можно получить любое количество городов от 15 до 100, сохранив количество дорог. Отделим в нижнем ряду первые 14 городов и их трогать не будем. Эти 14 городов вместе со столицей назовём *ядром*. Ядро — это граф из 15 вершин, в котором уже проведено 14 рёбер, значит, в нём можно провести ещё не более $105 - 14 = 91$ ребра. Будем производить следующую операцию. Возьмём произвольный город, не лежащий в ядре, и зачеркнём

его. При этом придётся убрать ровно одну дорогу, которая соединяла этот город со столицей. Чтобы скомпенсировать количество дорог, нужно добавить ещё одно ребро в граф, образующий ядро. Итак, количество городов уменьшилось на единицу, а количество дорог сохранилось.

Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не исчезнут все города, не лежащие в ядре. Это всегда можно сделать, поскольку количество городов, не лежащих в ядре, равно $100 - 14 = 86 < 91$. Так мы сможем получить любое количество городов от 15 до 100.

7. Ответ: решений нет.

Решение. Пусть решение существует. Тогда $(x-2)x(x+2) = y^2$. Каждый нечётный простой множитель числа y может входить лишь в одно из чисел $x-2$, x, $x+2$ и потому входит в него чётное число раз. Следовательно, каждое из этих чисел имеет вид либо z^2, либо $2z^2$ — в зависимости от того, чётное или нечётное число двоек содержится в его разложении. Значит, среди этих чисел найдётся либо два квадрата, либо два удвоенных квадрата. Но разность двух квадратов натуральных чисел не может быть равна ни 2, ни 4. То же верно и для удвоенных квадратов, и мы получаем противоречие.

8. Ответ: 53 числа.

Решение. Найдём общий вид чисел, обладающих указанным свойством.

Рассмотрим сначала нечётные числа. Каждый делитель нечётного числа является нечётным. Для того, чтобы сумма нечётных чисел была нечётной, необходимо и достаточно, чтобы количество слагаемых было нечётным. Следовательно, число должно являться точным квадратом. Действительно, число является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждый простой делитель входит в него в чётной степени. Возьмём число n и какой-то его делитель m. Тогда $\frac{n}{m}$ — тоже делитель числа n. Поэтому все его делители разбиваются на пары $\left(m, \frac{n}{m}\right)$ за исключением случая, когда $m = \frac{n}{m}$. Тогда $m^2 = n$, то есть n является точным квадратом.

Любое чётное число m можно представить в виде $m = 2^s \cdot r$, где r нечётное, поэтому все его делители, не являющиеся делителями числа r, являются чётными. Добавление любого количества чётных чисел к искомой сумме не меняет её чётности, поэтому условию задачи удовлетворяют только такие m, для которых r — полный квадрат.

Полученный результат удобно переформулировать: искомые числа имеют вид либо n^2, либо $2n^2$, где n — натуральное.

В первой тысяче содержатся квадраты чисел от 1 до 31 и удвоенные квадраты чисел от 1 до 22, то есть всего имеется $31 + 22 = 53$ числа, обладающие указанным свойством.

Первая Лига 8–9

1. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Ответ: выигрывает второй.

Решение. Сгруппируем числа от 1 до 100 следующим образом:

$$(1, 6, 7, 8),\ (3, 2),\ (5, 4),\ (10, 9),\ (12, 11),\ \ldots,\ (100, 99),$$

то есть особо выделена четвёрка чисел, а остальные разбиты на пары вида $(k+1, k)$. Назовём пару чисел *хорошей*, если эти два числа можно подставить в уравнение так, чтобы корни были различными целыми числами. Все пары в нашем разбиении — хорошие, потому что

$$x^2 + (k+1)x + k = (x+1)(x+k).$$

Второй игрок будет действовать так: если первый вычёркивает число в какой-нибудь паре, то второй вычёркивает второе число в этой паре. Приведём схему действий в случае, когда первый вычёркивает какое-либо число из четвёрки:

Ход первого	Ход второго	Остаётся
1	8	$(7, 6)$
8	1	$(7, 6)$
6	1	$(8, 7)$
7	1	$(6, 8)$

Любая пара чисел, которая остаётся от четвёрки, тоже является хорошей. Таким образом, второй игрок всегда следит за тем, чтобы непарных чисел не оставалось, а все получающиеся из четвёрки пары тоже были хорошими. При такой стратегии останется одна хорошая пара чисел, то есть второй игрок выиграет.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. Решение. Без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \geqslant b + c > p.$$

Последнее неравенство сразу следует из неравенства треугольника.

6. Ответ: R.

Решение. Очевидно, что картинка симметрична относительно прямой BH, которая делит угол ABC пополам (см. рис. 57). Заметим, что

$\angle QBX = \angle QSX$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle XQS = \angle XBS$. Но $\angle QBX = \angle XBS$ в силу симметрии, поэтому все четыре угла равны между собой. Значит, треугольник QSX равнобедренный с основанием QS. Следовательно, точка X лежит на серединном перпендикуляре к хорде QS, кроме того, она, очевидно, равноудалена от точек Q и T, поэтому X является центром исходной окружности. Следовательно, расстояние от X до AC равно R.

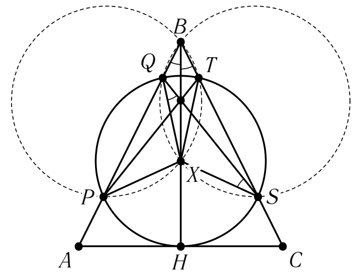

Рис. 57

7. Ответ: не существует.

Решение. Из условия следует, что

$$x_n = (n+a) \cdot (n + 2004a),$$
$$x_{n+1} = (n+1+a) \cdot (n+1+2004a).$$

Пользуясь алгоритмом Евклида, получаем, что

$$\text{НОД}(n + 2004a, n+1+a) = \text{НОД}(n + 2004a, 2003a - 1).$$

Остаётся заметить, что при $n = 2002a - 2$

$$\text{НОД}(2002a - 2 + 2004a, 2003a - 1) = \\ = \text{НОД}\big(2 \cdot (2003a - 1), 2003a - 1\big) = 2003a - 1.$$

8. См. задачу 8 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Решение. Поскольку углы $PA'C$ и $PB'C$ прямые, то четырехугольник $PA'CB'$ вписан в окружность с диаметром PC, то есть $\angle PA'B' = \angle PCB'$. Поэтому $PC'' = PA' \sin \angle PA'B' = PA' \sin \angle PCB' = PA' \cdot \frac{PB'}{PC}$. Следовательно, $PC \cdot PC' \cdot PC'' = PA' \cdot PB' \cdot PC'$. Аналогичное равенство доказывается и для двух других произведений, значит, все они равны между собой.

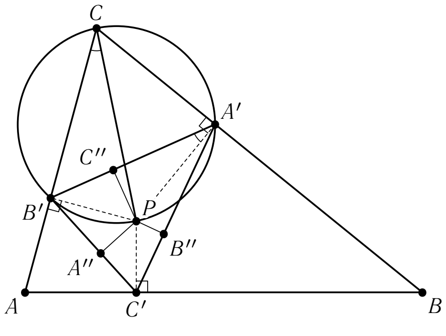

Рис. 58

2. Ответ: за 33 хода.

Решение. Вертикальные ходы будем обозначать буквой В, горизонтальные — буквой Г. Запись ВГГ означает, что ладья сделала один вертикальный ход, а затем два горизонтальных. *Весом* столбца назовём суммарное число ходов, которое сделали стоящие в нём изначально белая и чёрная ладьи (такие ладьи будем называть *ладьями данного столбца*). Очевидно, что столбцов веса 2 не бывает. Будем говорить, что ладья *закрывает* некоторый столбец, если последний её ход — это вертикальный ход длины 8 в этом столбце. Такую ладью будем называть *закрывающей*. Так как каждый столбец закрывает не более одной ладьи, то закрывающих ладей не больше 8.

Пусть вес столбца равен 4. Тогда либо обе его ладьи делают по два хода, либо одна из них делает один ход, а другая три. В первом случае обе ладьи не могут сходить ВГ (какая-то из них должна первой сделать свой вертикальный ход, другая должна освободить для неё место), следовательно одна из них делает ходы ГВ и тем самым является закрывающей. Во втором случае ладья, сделавшая один ход, закрывает свой столбец. Таким образом, в столбце веса 4 есть хотя бы одна закрывающая ладья. Если вес столбца равен 3, то одна из его ладей закрывает свой столбец, а другая делает ходы ГВ и закрывает некоторый другой столбец, то есть в столбце веса 3 обе ладьи — закрывающие. Так как закрывающих ладей не больше 8, то всего столбцов веса 3 должно быть не больше, чем столбцов, обе ладьи которых не являются закрывающими (а такими могут быть только столбцы веса 5 или больше). Таким образом, суммарный вес всех столбцов (то есть общее число ходов) не меньше 32.

Покажем, что этот вес больше 32. Равенство возможно только в том случае, когда все вертикали закрыты; в каждом столбце веса 4 ровно одна закрывающая ладья; столбцов веса 3 ровно столько же, сколько столбцов веса 5, и при этом в столбцах веса 5 нет закрывающих ладей; столбцов веса, большего 5, нет вообще.

Предположим, что все эти условия выполнены. Тогда закрывающие ладьи — это ладьи из столбцов веса 3 и 4, и они делают 1 или 2 хода, а все остальные ладьи делают не больше 3 ходов (в столбце веса 5 нет закрывающих ладей, а поэтому в нём не может быть и ладьи, сделавшей 4 хода).

Если обратить движение ладей во времени, то применимы все предыдущие рассуждения, в частности, имеется 8 закрывающих ладей. При прямом ходе времени они являются открывающими, то есть своим первым ходом проходят всю вертикаль. Таким образом, в каждом столбце есть открывающая его ладья.

Посмотрим на первый горизонтальный ход и на тот столбец, в котором оказалась сделавшая этот ход ладья. Очевидно, что он ещё не открыт. Но до того, как он будет открыт, наша ладья должна уйти из этого столбца. Поскольку ладья должна придти в столбец и уйти из него (то есть потратить на это 2 горизонтальных хода), а всего ходов не больше 3, то вертикальный ход только один и имеет длину 8. Очевидно, что он не может быть ни первым (в столбце находится вторая ладья), ни вторым (столбец ещё не открыт), а потому он последний, то есть закрывающий. Но закрывающие ладьи делают меньше 3 ходов. Противоречие.

Покажем, что 33 ходов достаточно. Опишем решение словесно, а потом приведём запись шахматных ходов. Пусть на первой горизонтали (снизу) стоят белые ладьи, а на восьмой (сверху) — чёрные.

- Самая правая нижняя (белая) ладья ходит вверх на 5 клеток (1 ход).
- Самая левая верхняя (чёрная) ладья ходит вниз на 5 клеток, затем вправо до конца (тем самым оказывается в правом столбце под сходившей первой ладьёй), затем ходит вниз до конца (и достигает цели своего путешествия) (3 хода).
- Самая левая нижняя белая ладья ходит вверх до упора и успокаивается (1 ход).
- Самая левая верхняя чёрная ладья ходит ВГВ и успокаивается (3 хода).
- Далее последние два шага повторяются ещё 6 раз.
- Ладья, сделавшая самый первый ход, идёт вверх до упора, и мы победили (1 ход).

Количество	**Ход**
1	h1-h5
3	a8-a4-h4-h1
1	a1-a8
3	b8-b2-a2-a1
1	b1-b8
3	c8-c2-b2-b1
1	c1-c8
3	d8-d2-c2-c1
1	d1-d8
3	e8-e2-d2-d1
1	e1-e8
3	f8-f2-e2-e1
1	f1-f8
3	g8-g2-f2-f1
1	g1-g8
3	h8-h6-g6-g1
1	h5-h8
33	—

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Первой Лиги 8–9.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2.2.3. Третий тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: будет.

Решение. Предположим, что равновесия не будет. Можно считать, что гирьки, которые оба раза были на левой чашке весов, весят больше, чем те, которые оба раза были на правой чашке. Тогда, чтобы при первом взвешивании было равновесие, те гирьки, которые сначала были на левой чашке, а потом на правой, должны весить меньше, чем те, которые сначала были на правой чашке, а потом на левой. Но тогда при втором взвешивании левая чашка окажется тяжелее правой. Противоречие.

2. Ответ: с Витей.

Решение. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Гришей и с Аней, а Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Гришей, значит, знакомство Бори с Витей состоялось раньше, чем знакомства Ани с Гришей и Бори с Гришей. Поскольку Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей, то Гриша раньше всех познакомился с Витей.

3. Ответ: в 1986 или 2004 году.

Решение. Пусть год записывается четырёхзначным числом, которое начинается с двойки. Тогда достаточно найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт восемь. Это число четыре. Значит, задача могла быть придумана в 2004 году.

Пусть задача была придумана раньше двухтысячного года. Тогда сумма цифр не может быть больше $9+9+9+1=28$. Значит, само число не меньше 1982. Пусть третья цифра числа — восьмёрка. Тогда надо найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт $2010-1980-(1+9+8)=12$. Это число шесть. Значит, задача могла быть придумана в 1986 году. Пусть третья цифра числа — девятка. Тогда надо найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт $2010-1990-(1+9+9)=1$. Таких чисел нет.

4. Ответ: за три вопроса.

Решение. Покажем, что трёх вопросов достаточно. Условно расположим подозреваемых в вершинах куба. Введём на этом кубе координаты: каждую вершину будем кодировать тройкой нулей или единиц (см. рис. 59). «Опросим» три взаимно перпендикулярные координатные плоскости — это будут множества $\{(0,y,z)\}$, $\{(x,0,z)\}$, $\{(x,y,0)\}$. Опрос каждой плоскости устанавливает координату фальшивомонетчика по x, y и z: если мы получили ответ «да», то соответствующая координата фальшивомонетчика равна нулю, иначе единице.

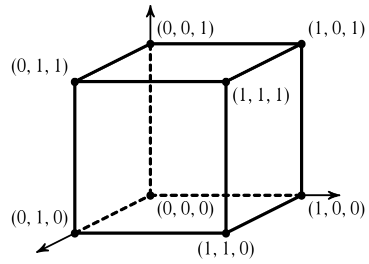

Рис. 59

Теперь докажем, что двух вопросов не хватит. Действительно, ответ на каждый вопрос инспектора позволяет разбить множество из 8 человек на 2 подмножества, в одном из которых находится фальшивомонетчик. Припишем каждому человеку упорядоченную пару (a_1, a_2) из нулей и единиц следующим образом. Если данный человек по результату первого опроса оказался в одной группе с фальшивомонетчиком, то $a_1 = 1$; иначе $a_1 = 0$. Аналогично по результату второго опроса определяется a_2. Как бы инспектор ни задавал два вопроса, могут найтись два человека с парой $(1, 1)$. Тогда инспектор не сможет определить, кто из них фальшивомонетчик.

Комментарий. Может показаться, что способ задать три вопроса, описанный в решении, довольно сложен. Действительно, есть и другой способ, основанный на методе *половинного деления*. Именно, разделим всех подозреваемых на две равные группы и опросим одну из них. В зависимости от ответа выберем либо её, либо другую группу. За один вопрос мы уменьшили количество подозреваемых вдвое. Повторим эту процедуру для той «половинки», в которой находится фальшивомонетчик, и так далее. Так можно продолжать, пока количество подозреваемых не уменьшится до 2.

Теперь возьмём одного человека (назовём его A) из тех, кто находится вне подозрения, и добавим к этим двум людям, а одного из тех (любого) исключим. Зададим последний вопрос полученной группе из 2 человек. Если ответ отрицательный, то исключённый из группы человек и есть фальшивомонетчик, а иначе фальшивомонетчиком является сосед A в полученной группе.

Оба алгоритма достаточно универсальны и тривиально обобщаются на произвольное количество человек, равное степени двойки. Однако существенное отличие первого алгоритма от второго состоит в том, что опрашиваемые множества выбираются заранее, а в алгоритме, основанном на методе половинного деления, каждое следующее подмножество людей выбирается на основании всех предыдущих ответов.

5. Ответ: да, сможет.

Решение. Будем отмечать разрезы пунктирными линиями. Сначала разрежем кубик вертикальными разрезами, как показано на рис. 60 (изображён вид сверху). Тогда он распадётся на три фигуры, изображённые на рис. 61, и одну фигуру, изображённую на рис. 62. А их уже несложно разрезать на уголки.

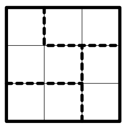

Рис. 60

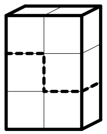

Рис. 61

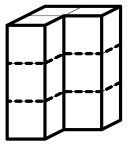

Рис. 62

6. Ответ: выиграет жюри.

Решение. Заметим, что после того, как обе команды сделают ход, в кучке может оказаться на две, три или четыре спички меньше. Если первым ходом жюри возьмёт одну спичку, а потом будет делать ходы так, чтобы количество спичек в кучке всегда делилось на пять, то жюри выиграет независимо от того, как ходят команды.

7. Ответ: нет, не может.

Решение. Сложим все 26 чисел. Тогда числа, которые записаны в вершинах, будут подсчитаны один раз как числа, записанные в вершинах, трижды, как числа, записанные на рёбрах, и трижды, как числа, записанные на гранях. Значит, в этой сумме все числа подсчитаны семь раз, следовательно, сумма всех чисел должна делится на семь, а это не так.

8. Ответ: да, могут, например, в точке, находящейся на расстоянии две трети от точки старта.

Решение. Когда первый таракан окажется на расстоянии $\frac{2}{3}$ от точки старта, второй таракан пробежит $\frac{4}{3}$ и окажется в той же точке. Третий таракан к этому времени пробежит $\frac{8}{3}$ и тоже окажется в этой точке. Пусть какой-то таракан с нечётным номером находится в этой точке. Это значит, что он чётное число раз пробежал весь коридор и после этого ещё пробежал $\frac{2}{3}$. Тогда таракан, который бежит вдвое быстрее, пробежал весь коридор туда-обратно вдвое большее число раз и ещё $\frac{4}{3}$, то есть оказался в той же точке. А следующий таракан пробежал весь коридор туда-обратно вчетверо большее число раз, и ещё $\frac{8}{3}$. Таким образом, все тараканы встретятся в этой точке.

Высшая Лига 7

1. Ответ: 5 или 2,5.

Решение. Исследуем, какими соотношениями связаны длины сторон треугольника, у которого одна из биссектрис перпендикулярна медиане, а некоторая другая биссектриса перпендикулярна другой медиане.

Пусть в треугольнике KLM биссектриса KP перпендикулярна медиане LN (см. рис. 63), тогда KP — одновременно биссектриса и высота в треугольнике KLN, следовательно, $KL = KN = a$ и $KM = 2KL = 2a$.

Предположим, что некоторая другая биссектриса этого треугольника перпендикулярна другой медиане. Возможны такие случаи:

1) если это биссектриса угла KML (см. рис. 64), то она может быть перпендикулярна только медиане, выходящей из вершины K, следовательно, по соображениям, приведённым в первом абзаце, $LM = 2KM = 4a$. Такого треугольника не существует, так как для него не выполняется неравенство треугольника: $a + 2a < 4a$.

2) Если биссектриса угла KLM перпендикулярна медиане, выходящей из вершины K (см. рис. 65), то $LM = 2KL = 2a$.

3) Если биссектриса угла KLM перпендикулярна медиане, выходящей из вершины M (см. рис. 66), то $KL = 2LM$, то есть $LM = \frac{a}{2}$. Этот случай тоже невозможен, так как не выполнено неравенство треугольника: $a + \frac{a}{2} < 2a$.

Таким образом, единственный возможный случай — равнобедренный треугольник, основание которого в два раза меньше боковой стороны. Если AB — основание, то периметр P треугольника ABC равен $1 + 2 + 2 = 5$, если же AB — боковая сторона, то $P = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2{,}5$.

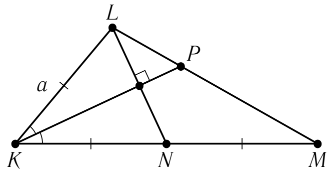

Рис. 63

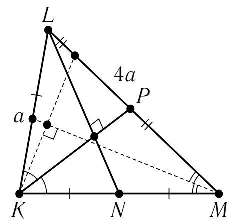

Рис. 64

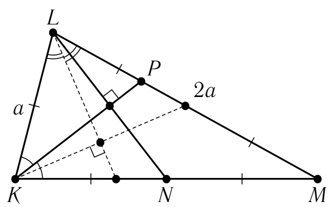

Рис. 65

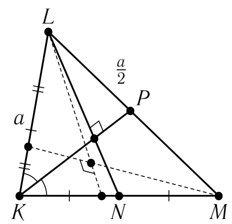

Рис. 66

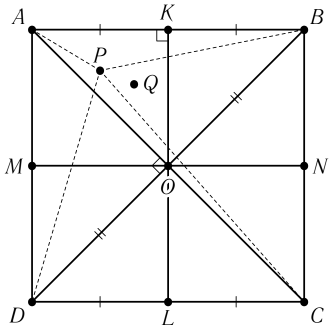

Рис. 67

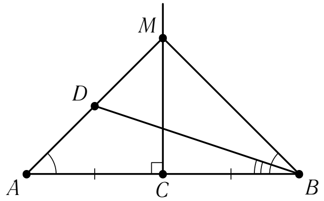

Рис. 68

2. Ответ: да, верно.

Решение. Диагонали квадрата и отрезки, соединяющие середины его боковых сторон, разбивают квадрат на 8 треугольников. Так как рассматриваются 9 точек, то по принципу Дирихле две из них окажутся в одном треугольнике.

Докажем, что если две точки попали в одну часть, то рядом с ними написано одно и то же. Без ограничения общности можно считать, что точки P и Q лежат в треугольнике AKO (см. рис. 67).

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. К отрезку AB проведён серединный перпендикуляр CM (см. рис. 68). Точка D лежит в левой полуплоскости относительно CM. Тогда $AD < BD$.

Доказательство. Продлим AD до пересечения с CM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle MAB = \angle MBA$, следовательно, $\angle ABD < \angle MBA = \angle DAB$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AD < BD$. (Если точка D лежит в правой полуплоскости, то $AD > BD$.) Лемма доказана.

Поскольку KL — серединный перпендикуляр к отрезку AB и обе точки лежат в левой полуплоскости относительно KL, то $PA < PB$ и $QA < QB$. Также KL — серединный перпендикуляр к отрезку CD и обе точки лежат в левой полуплоскости относительно него, поэтому $PD < PC$ и $QD < QC$.

С другой стороны, AC — серединный перпендикуляр к отрезку BD и обе точки лежат в правой полуплоскости относительно него, поэтому $PB < PD$ и $QB < QD$.

Таким образом, $PA < PB < PD < PC$ и $QA < QB < QD < QC$, следовательно, рядом с точками P и Q написано одно и то же.

3. Решение. Числа x и y не могут быть одновременно нечётными, поскольку z^4 не может давать остаток 2 от деления на 4. Поэтому без ограничения общности можно считать, что x чётно. Тогда y нечётно, поэтому и z нечётно.

Покажем, что НОД$(z^2-y, z^2+y) = 2$. Действительно, если $z^2 - y = 2^k \cdot s$ и $z^2 + y = 2^k \cdot t$, то $2z^2 = 2^k \cdot (s+t)$, а поскольку z нечётно, то

$k \leqslant 1$. С другой стороны, поскольку y и z нечётны, числа $z^2 - y$ и $z^2 + y$ являются чётными, значит, $k = 1$. Теперь допустим, что

$$\begin{cases} z^2 - y = p \cdot m, \\ z^2 + y = p \cdot n, \end{cases}$$

где p — простое число, отличное от 2. Тогда

$$\begin{cases} 2z^2 = p \cdot (m+n), \\ 2y = p \cdot (m-n). \end{cases}$$

Но тогда получается, что p является общим делителем y и z, что невозможно по условию.

Поскольку $x^2 = (z^2 - y)(z^2 + y)$, то, с учётом сказанного выше про НОД, получаем $z^2 - y = 2u^2$, $z^2 + y = 2v^2$ и $x = 2uv$, где u и v — некоторые натуральные числа. Сложив и поделив на 2, получаем, что $z^2 = u^2 + v^2$. Аналогично началу решения можно считать, что u чётно, а v нечётно. Тогда $u^2 = (z-v)(z+v)$ делится на 8. Поэтому u делится на 4, откуда $x = 2uv$ делится на 8.

4. Ответ: 100.

Решение. Если $21p - 79q = 0$ для натуральных p и q, то $p \geqslant 79$ и $q \geqslant 21$. Поэтому $p + q \geqslant 100$, то есть нужно минимум 100 раз нажать на кнопки.

Покажем, что 100 нажатий достаточно. Заметим, что где бы лифт не находился, он может поехать только в одну сторону, то есть его траектория определена однозначно. Для удобства будем нумеровать этажи с нуля. Выпишем последовательность, в результате которой лифт поднимется на 1 этаж вверх.

Этаж	Нажатий
$79 - 3 \cdot 21 = 16$	4
$16 + 79 - 4 \cdot 21 = 11$	5
$11 + 79 - 4 \cdot 21 = 6$	5
$6 + 79 - 4 \cdot 21 = 1$	5
Итого	19

Эта последовательность повторится 5 раз, после чего лифт окажется на 5-м этаже. Будет сделано $19 \cdot 5 = 95$ нажатий. Далее потребуется ещё 5 нажатий: $5 + 79 - 4 \cdot 21 = 0$, то есть лифт окажется на первом этаже.

Комментарий. В общем случае, когда в $(n+m)$-этажном доме лифт при нажатии одной кнопки поднимается на m этажей вверх, а при нажатии другой — на n этажей вниз, наименьшее число нажатий кнопок равно $\frac{m+n}{\text{НОД}(m,n)}$.

Действительно, пронумеруем этажи от 0 до $n+m-1$ и расположим их на окружности, то есть будем считать, что у нашего дома «над» $(m+n-1)$-м этажом расположен нулевой, и так далее. Заметим, что поездка на n этажей вниз по такому кольцу — это всё равно что поездка на m этажей вверх. Поэтому теперь можно считать, что мы движемся всё время в одном направлении шагами длины m. Применяя в точности такие же рассуждения, как и при решении задачи 6 Высшей Лиги 7 первого тура, и учитывая то, что $\text{НОД}(m+n, m) = \text{НОД}(m, n)$, получаем требуемый ответ.

5. Ответ: 859.

Решение. Приведём пример, когда получится число 859. Возьмём такую схему, как показано на рис. 69 («магистраль» длины 40 с началом в столице и концом в захолустном городе, к которой прицеплено ещё 39 захолустных городов). Отметим на рёбрах графа расстояния до столицы. Ясно, что искомая сумма в этом случае равна

$$0+(2+3+\ldots+40)+40 = (1+2+\ldots+40)+39 = \\ = \frac{1+40}{2}\cdot 40+39 = 859.$$

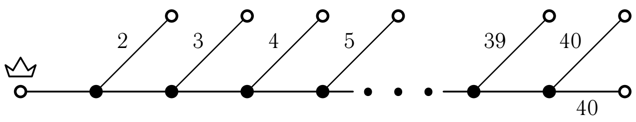

Рис. 69

Теперь докажем, что больше получить нельзя. Для каждой схемы обозначим через m максимальное расстояние от столицы до захолустного города. Назовём два города *близкими*, если они захолустные и выходящие из них дороги ведут в один и тот же город.

Заметим, что для любой схемы найдутся два близких захолустных города A и B, находящиеся на расстоянии m от столицы. Действительно, возьмём произвольный захолустный город A и пройдём по (единственной) выходящей из него дороге. Мы попадём в незахолустный город, из которого выходит 3 дороги. Одна ведёт в столицу, по второй мы только что пришли, а третья ведёт в ещё один город B. Если B — незахолустный город, то найдётся захолустный город B', путь от которого до столицы проходит через B. Но тогда расстояние от столицы до B' будет больше, чем от столицы до B. Это противоречит тому, что A был наиболее удалённым городом. Таким образом, B является захолустным, и потому города A и B — близкие.

Предположим, что найдутся два других близких города. Обозначим через s расстояние от каждого из них до столицы. Удалим выходящие из них дороги и соединим их с A. Подсчитанная сумма изменится на

$$(m+1+m+1+s-1)-(m+s+s) = 1+m-s > 0,$$

то есть новая схема даёт большую сумму. Поэтому для максимальной схемы имеется ровно одна пара близких городов — тех, которые находятся на расстоянии m от столицы. Назовём *скелетом* графа то, что от него остаётся, если убрать все захолустные города. Максимальная схема соответствует графу с неразветвлённым скелетом. Действительно, если бы скелет разветвлялся, то нашлись бы две пары близких городов.

Легко видеть, что граф с неразветвлённым скелетом, удовлетворяющий условиям задачи, — это и есть схема, построенная в примере.

6. Ответ. да, верно.

Решение. Если в данном треугольнике есть сторона целой длины, то разрезать можно, например, так, как показано на рис. 70.

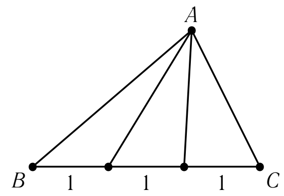

Рис. 70

Пусть таких сторон нет, и в данном треугольнике ABC длина стороны AB больше 1. Отметим на стороне BC такую точку D, чтобы длина DC была целой, а $BD < 1$ (а если $BC < 1$, то будем считать, что D совпадает с C). Проведём окружность радиуса 1 с центром в точке B (см. рис. 71). Так как точка D лежит внутри окружности, а точка A — вне её, то окружность пересечёт отрезок AD в некоторой точке E.

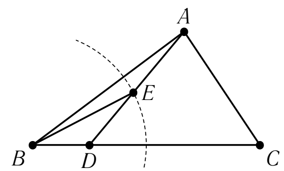

Рис. 71

Таким образом, получим треугольники ABE и BED со стороной $BE = 1$ и, быть может, треугольник ADC с целой стороной DC, к которому применимы предыдущие рассуждения.

7. Решение. На рис. 72 показана искомая схема расстановки чисел.

Доказательство единственности будет проведено для общего случая (см. задачу 8 Высшей Лиги 8–9). В нашем случае граф имеет вид прямоугольной сетки 8×8 (см. рис. 73).

8	9	10	11	12	13	14	**15**
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 72

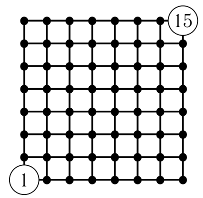

Рис. 73

8. См. задачу 4 Первой Лиги 6–7.

Первая Лига 8–9

1. Решение. Проведём необходимые дополнительные построения (см. рис. 74). Имеем $\angle AXC' = \angle ABC'$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), также $\angle AXC' = \angle CXA' = \angle CBA'$.

Кроме того, $\angle CXA' + \angle CXA = 180^\circ$ и $\angle CB'A + \angle CXA = 180^\circ$ (так как четырёхугольник $AXCB'$ — вписанный), следовательно, $\angle CXA' = CB'A$, поэтому $\angle CBA' = \angle CB'A = \angle ABC'$.

Аналогично, $\angle A'CB = \angle A'XB = \angle B'XA = \angle B'CA$ и $\angle A'XB = 180^\circ - \angle AXB = \angle AC'B$, поэтому в треугольниках ABC', $AB'C$ и $A'BC$ равны углы ACB', $A'CB$, $AC'B$ и углы $CB'A$, ABC', $A'BC$, следовательно, эти треугольники подобны.

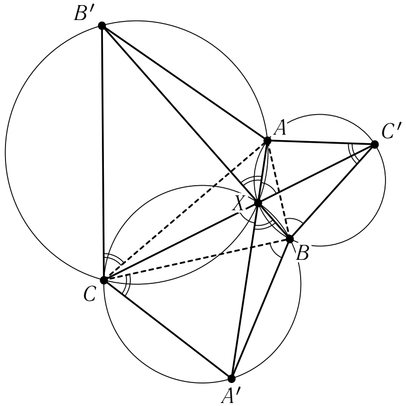

Рис. 74

2. Решение. Пусть K, L, M, N — проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA. Пусть K', L', M', N' — точки, симметричные точке P относительно этих прямых (см. рис. 75). Так как $BK' = BP = BL'$ и $\angle K'BD = \angle K'BA + \angle ABD = \angle ABP + \angle PBC = \angle B = \angle L'BD$, прямая BD — серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$. Аналогично, BD — серединный перпендикуляр к отрезку $M'N'$. Следовательно, четырёхугольник $K'L'M'N'$, а значит и гомотетичный ему четырёхугольник $KLMN$, является равнобедренной трапецией или прямоугольником. Именно это и требовалось доказать.

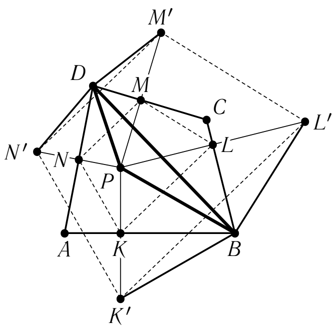

Рис. 75

3. Решение. Числа x и y не могут быть одновременно нечётными, поскольку z^4 не может давать остаток 2 от деления на 4. Поэтому можно считать, что x чётно. Тогда y нечётно, поэтому и z нечётно.

Теперь докажем делимость на 7. Имеем $y^2 = (z^2 - x)(z^2 + x)$. Рассуждая аналогично задаче 3 Высшей Лиги 7, получаем, что числа $z^2 - x$ и $z^2 + x$ взаимно просты, поэтому $z^2 - x = u^2$, $z^2 + x = v^2$ и $y = uv$. Отсюда $2z^2 = u^2 + v^2$. Квадрат целого числа при делении на 7 даёт остаток 0, 1, 2 или 4. Либо $x = z^2 - u^2 = v^2 - z^2$ делится на 7 (и тогда утверждение задачи доказано), либо числа u^2, v^2 и z^2 дают разные остатки от деления на 7. Второй случай невозможен, поскольку удвоенный квадрат целого числа при делении на 7 даёт те же остатки 0, 1, 2 и 4, а сумма двух различных чисел из набора $\{1, 2, 4\}$ не равна числу из этого набора.

4. Решение. Будем обозначать через $[a]$ целую часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Положим $M = \left[10^9\sqrt{2005}\right]$ и возьмём $m = M^2$ и $n = 10^3 \cdot M$. Тогда $\frac{m^2}{n^3} = \frac{1}{10^9} \cdot M$. Поэтому

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9} \cdot \left|\left[10^9\sqrt{2005}\right] - 10^9\sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9}.$$

Комментарий. Используя понятие непрерывности функции, можно доказать более общее утверждение без всяких выкладок. Будем искать m и n в виде $m = p^3$ и $n = q^2$. Теперь нам нужно приблизить сколь угодно точно число $\sqrt{2005}$ дробью $\left(\frac{p}{q}\right)^6$. Воспользуемся непрерывностью функции $f(x) = x^6$, то есть тем фактом, что если x и y достаточно близки, то и x^6 и y^6 тоже близки. Осталось приблизить с достаточной точностью число $\sqrt[12]{2005}$ дробью $\frac{p}{q}$ (достаточно взять подходящее приближение достаточно длинной десятичной дробью).

5. Решение. В этой задаче предполагалось, что алхимик может пользоваться весами, чтобы определить, в каком из двух сосудов больше жидкости.

Будем называть *состоянием* (a_1, a_2, a_3, a_4) ситуацию, в которой в сосуде с номером i содержится a_i унций эликсира.

Пусть у нас есть состояние $(a, b, 0, n - a - b)$. Мы можем считать, что $a \leqslant b$. Тогда поставим на весы первый и третий сосуд и уравновесим их при помощи жидкости из второго сосуда, после чего выльем всю жидкость из третьего сосуда в четвёртый. Таким образом мы можем перейти от состояния $(a, b, 0, n - a - b)$ к состоянию $(a, b - a, 0, n - b)$. Назовём этот переход *основным преобразованием*.

При помощи основных преобразований мы можем запустить для a и b алгоритм Евклида. Когда он завершится, мы получим из состояния

$(a, b, 0, n-a-b)$ состояние

$$\bigl(\text{НОД}(a,b), 0, 0, n-\text{НОД}(a,b)\bigr),$$

причём мы будем знать числа $\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}$ и $\frac{b}{\text{НОД}(a,b)}$.

Заметим, что основное преобразование обратимо. Действительно, из состояния $(a, b-a, 0, n-b)$ нетрудно получить состояние

$$(a, b-a, a, n-a-b),$$

а из него — искомое $(a, b, 0, n-a-b)$. Поэтому мы можем обратить и весь алгоритм Евклида.

Вернёмся теперь к исходной задаче: если вначале у нас было состояние $(a, b, c, 0)$, то, проделав для каждой пары сосудов алгоритм Евклида и вернувшись к исходному состоянию, мы получим достаточно информации, чтобы узнать a, b и c. Действительно, вспомнив, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ (иначе бы алхимик не мог получить одну унцию), получаем, например,

$$a = \text{НОК}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}, \frac{a}{\text{НОД}(a,c)}\right).$$

Последняя формула следует из того, что $a = \text{НОК}(x, y)$ тогда и только тогда, когда $a \vdots x$, $a \vdots y$ и $\text{НОД}\left(\frac{a}{x}, \frac{a}{y}\right) = 1$.

6. Решение. Пусть k — число захолустных городов. В сумму всех подсчитанных чисел каждая дорога, выходящая из захолустного города, входит один раз; каждая из остальных $79-k$ дорог входит не более k раз. Поэтому указанная сумма не превосходит

$$k + k\cdot(79-k) = k\cdot(80-k) \leqslant 40^2 = 1600 < 2005.$$

Комментарий. Полученная оценка 1600 является неулучшаемой, то есть существуют схемы с такой суммой чисел. Пример показан на рис. 76.

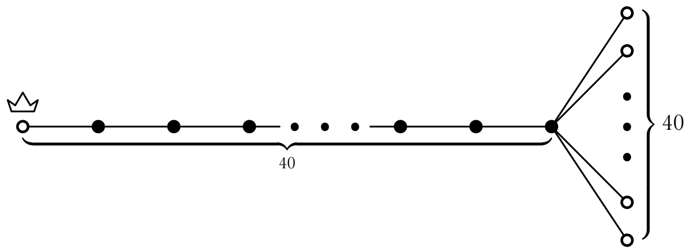

Рис. 76

7. Решение. Для начала заметим, что если какая-либо траектория самопересекается, то можно отбросить все замкнутые петли и считать её несамопересекающейся.

Пусть траектории «северного» и «южного» велосипедистов не пересекаются (кроме начальной и конечной точки). Тогда их объединение ограничивает некоторый клетчатый многоугольник. Пусть в начальный момент он находится, скажем, справа от «северного» велосипедиста (случай «слева» аналогичен — тогда от «южного» велосипедиста многоугольник находится справа). Такое расположение сохраняется в процессе движения велосипедистов (поскольку их траектории не пересекаются). Следовательно, и в начальный, и в конечный момент многоугольник располагается к востоку от местонахождения велосипедистов. Это означает, что «восточный» велосипедист вначале уезжает внутрь многоугольника, а в конце приезжает с внешней стороны. Значит, по дороге он пересекает границу многоугольника, то есть траекторию одного из двух других велосипедистов.

8. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Решение. Обозначим вершины треугольника через A, B, C, а концы хорды — через X и Y. Тогда нам надо доказать, что

$$AX^2 + AY^2 + BX^2 + BY^2 + CX^2 + CY^2 = 3XY^2.$$

Можно считать, что B и C лежат по одну сторону от XY, а A — по другую (см. рис. 77). Обозначим $\angle XBY = \alpha$, тогда $\angle XCY = \alpha$, а $\angle XAY = \pi - \alpha$ (так как все они опираются на хорду XY). Запишем теорему косинусов для отрезка XY в треугольниках AXY, BXY и CXY:

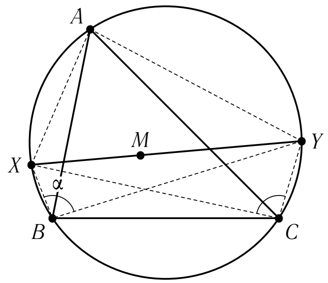

Рис. 77

$$AX^2 + AY^2 - 2AX\cdot AY\cos(\pi-\alpha) = XY^2,$$
$$BX^2 + BY^2 - 2BX\cdot BY\cos\alpha = XY^2,$$
$$CX^2 + CY^2 - 2CX\cdot CY\cos\alpha = XY^2.$$

Сложим эти три равенства, учитывая, что $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$. Теперь нам надо доказать, что

$$BX\cdot BY\cos\alpha + CX\cdot CY\cos\alpha = AX\cdot AY\cos\alpha.$$

Для этого проверим, что

$$\frac{1}{2}BX\cdot BY\sin\alpha + \frac{1}{2}CX\cdot CY\sin\alpha = \frac{1}{2}AX\cdot AY\sin\alpha,$$

то есть что сумма площадей треугольников BXY и CXY равна площади треугольника AXY.

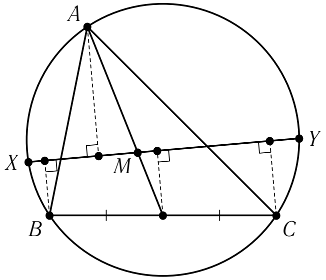

Рис. 78

Распишем эти площади через высоты, опущенные из вершин треугольника на сторону XY (обозначим эти высоты через h_A, h_B и h_C соответственно, см. рис. 78). Теперь нам достаточно доказать равенство $h_B + h_C = h_A$. Пусть h — длина перпендикуляра, опущенного на XY из середины BC. Тогда, с одной стороны, $h = \frac{1}{2}h_A$, так как точка пересечения медиан делит медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. С другой стороны, $h = \frac{1}{2}(h_B + h_C)$, так как h — средняя линия в (прямоугольной) трапеции со сторонами h_B и h_C. Отсюда получаем искомое равенство.

2. См. задачу 2 Первой Лиги 8–9.

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. Решение. Упорядочим числа по возрастанию: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{400}$. По условию

$$a_{400} < a_1 + a_2 + \ldots + a_8 < 8a_8.$$

Значит, все 393 числа $a_8, a_9, \ldots, a_{400}$ лежат на отрезке от a_8 до $8a_8$. Разделим этот отрезок длины $7a_8$ на $7 \cdot 14 = 98$ равных интервалов длины $\frac{a_8}{14}$ каждый. Так как $393 = 4 \cdot 98 + 1$, то найдётся интервал $\left[b, b + \frac{a_8}{14}\right]$, содержащий хотя бы 5 чисел. Эти числа удовлетворяют условию, поскольку

$$\frac{\left(b + \frac{a_8}{14}\right)^4}{b^4} = \left(1 + \frac{a_8}{14b}\right)^4 \leqslant \left(1 + \frac{a_8}{14a_8}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{14}\right)^4 < \left(1 + \frac{2}{7}\right)^2 < 2.$$

$7\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	10	$10\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{4}$
7	8	9	10	11	12	**13**	$12\frac{1}{4}$
6	7	8	9	10	11	12	$11\frac{1}{2}$
5	6	7	8	9	10	11	$10\frac{3}{4}$
4	5	6	7	8	9	10	10
3	4	5	6	7	8	9	$9\frac{1}{4}$
2	3	4	5	6	7	8	$8\frac{1}{2}$
1	2	3	4	5	6	7	$7\frac{3}{4}$

Рис. 79

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. Решение. На рис. 79 приведена искомая расстановка чисел.

Доказательство единственности расстановки мы проведём в несколько более общей ситуации. А именно, будем решать такую основную задачу:

В двух вершинах конечного графа поставлены числа (например, 1 и 13). Доказать, что можно единственным образом расставить числа в остальных вершинах графа так, чтобы каждое число (кроме двух, поставленных изначально) равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей.

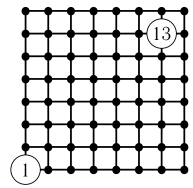

Рис. 80

Тогда наша задача — это основная задача для графа, имеющего вид прямоугольной сетки 8×8 (см. рис. 80).

Пусть у нас есть некоторая расстановка чисел, удовлетворяющая условию. Назовём её *правильной*. Приведём алгоритм восстановления чисел в вершинах графа. Алгоритм не будет зависеть от начальной расстановки, поэтому все правильные расстановки будут равны той, которая будет получена с помощью алгоритма, а значит, все равны между собой.

Через $R(v)$ будем обозначать число, записанное в вершине v. Алгоритм работает шагами, перед каждым шагом известны числа в части вершин (такие вершины будем называть *пройденными*). Перед первым шагом пройденными вершинами будут только две вершины. За каждый шаг работы алгоритм присоединяет к пройденным одну или несколько вершин. Таким образом, в конце работы алгоритма все вершины будут пройдены.

Опишем теперь шаг алгоритма. Назовём *допустимым* путь, у которого концы — это пройденные вершины, а все промежуточные вершины пути — непройденные. Назовём *наклоном* допустимого пути отношение разности известных алгоритму чисел в концах пути к количеству рёбер в пути. Другими словами, наклон пути — это разность арифметической прогрессии, «натянутой» на его концы с заданными значениями.

Алгоритм выбирает из множества всех допустимых путей путь с максимальным наклоном. Для нахождения такого пути достаточно рассмотреть все кратчайшие допустимые пути, поскольку от сокращения пути наклон только возрастает. Найдя путь с максимальным наклоном, алгоритм делает его промежуточные вершины пройденными, а числа в этих вершинах расставляет так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию вместе с уже известными значениями на концах пути.

Докажем по индукции корректность работы алгоритма. На нулевом шаге два известных числа найдены, разумеется, правильно. Пусть перед каким-то шагом все известные алгоритму числа найдены правильно; докажем, что на этом шаге построенные алгоритмом значения также правильны.

Пусть $\{v_1, v_2\}$ — ребро с максимальной разностью чисел в v_1 и v_2 среди всевозможных рёбер с концами в непройденных вершинах. Предположим для определённости, что значение в v_2 больше. Тогда v_2 — сосед v_1 с максимальным значением среди всех соседей. Пусть v_0 —

сосед v_1 с минимальным числом. $R(v_1) = \frac{1}{2}(R(v_0) + R(v_2))$, откуда

$$R(v_1) - R(v_0) = R(v_2) - R(v_1).$$

Аналогично, пусть v_{k+1} — сосед v_k с максимальным значением, v_{k-1} — сосед v_k с минимальным значением. Заметим, что

$$R(v_k) = \frac{1}{2}(R(v_{k-1}) + R(v_{k+1})),$$

откуда

$$R(v_k) - R(v_{k-1}) = R(v_{k+1}) - R(v_k).$$

Поскольку граф конечен, последовательность обязательно придёт в пройденную вершину и справа, и слева. Будем считать, что построение последовательности в обе стороны обрывается на пройденных вершинах. Значит, последовательность $R(v_i)$ является конечной арифметической прогрессией с известными алгоритму концами. Осталось только заметить, что последовательность v_i — путь с наибольшим наклоном, поскольку его наклон равен длине ребра с самой большой разностью значений на концах, а ни один путь не может иметь больший наклон. Тогда алгоритм выберет путь с точно таким же наклоном; но это возможно только в том случае, если значения на этом пути образуют арифметическую прогрессию. Доказательство закончено.

2.2.4. Четвёртый тур

Высшая Лига 7

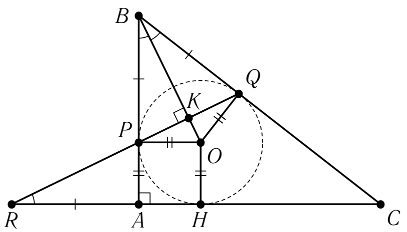

Рис. 81

1. Решение. Четырёхугольник $APOH$ является квадратом, поэтому $AP = PO$. Прямоугольные треугольники OPB и OQB равны по гипотенузе и катету. Далее, $\angle OBP =$ $= \angle ARP$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Значит, треугольники ARP и OPB равны по катету и острому углу. Отсюда $AR = BP = BQ$, что и требовалось доказать.

2. Первое решение. Проведём высоту BH в треугольнике ABC и высоту MK в треугольнике AMB. Поскольку в равнобедренном треугольнике высота является медианой, получаем, что $AH = HC$. Отсюда $AM = 2MH$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AMK.

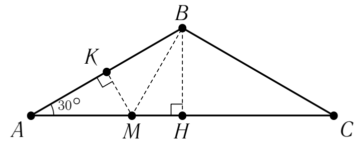

Рис. 82

У него один из углов равен 30°, поэтому меньший катет MK равен половине гипотенузы AM. Следовательно, $MK = MH$. Поэтому прямоугольные треугольники BMK и BMH равны по гипотенузе и катету, следовательно, $\angle MBK = \angle MBH$, то есть BM — биссектриса треугольника ABH. А так как $\angle ABH = 60°$, получаем, что $\angle MBH = 30°$. Отсюда $\angle MBC = 30° + 60° = 90°$.

Второе решение. Решим задачу с помощью обратного хода. Пусть M' — такая точка на отрезке AC, что $\angle M'BC = 90°$, тогда $\angle M'BA =$ $= 120° - 90° = 30°$, следовательно, треугольник $AM'B$ — равнобедренный с основанием AB. Значит, $AM' = BM'$. По свойству прямоугольного треугольника с углом в 30° получаем, что $BM' = \frac{1}{2}M'C$, то есть M' делит отрезок в отношении $1 : 2$. Но точка, делящая отрезок в заданном отношении, единственна, поэтому $M' = M$.

3. Ответ: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Решение. Так как дробь $\frac{a}{b}$ по условию существует, получаем, что $b \neq 0$. Поэтому числа $a + b$ и $a - b$ не равны, а остальные два равны одному из них.

Допустим, что $a = 0$. Тогда либо $0 - b = 0 \cdot b$, либо $0 + b = 0 \cdot b = 0$, что невозможно, поскольку $b \neq 0$. Значит, $a \neq 0$ и обе части равенства $ab = \frac{a}{b}$ можно разделить на a. Получаем, что $b^2 = 1$. Если $b = 1$, то получаем три значения $a + 1$, $a - 1$ и a для четырёх чисел, и потому этот случай не подходит. Значит, $b = -1$ и либо $a - 1 = -a$, либо $a + 1 = -a$. В первом случае получаем $a = \frac{1}{2}$, во втором случае получаем $a = -\frac{1}{2}$.

4. Ответ: нет, не может.

Решение. Предъявим такую стратегию второго игрока, что как бы ни ходил первый, второй сможет сделать так, чтобы количество цифр на доске не превышало некоторого заданного числа, например, 100. Предположим, в какой-то момент времени после хода первого игрока на доске появилось 100-значное число. Возможны следующие случаи:

1) Среди цифр, написанных на доске, есть две подряд идущих одинаковых цифры. Тогда второй стирает эти две цифры. Поскольку первый игрок очередным ходом может добавить только одну цифру, количество цифр на доске за эти два хода не увеличилось.

2) На доске нет двух одинаковых рядом стоящих цифр, но есть сочетания вида aba, где a, b — какие-то из цифр 1, 2, 3. Достаточно рассмотреть один случай, например, когда на доске встретился набор 121. Тогда следующим ходом второй приписывает две двойки так: $\ldots\mathbf{22}121\ldots$

(на доске $100+2$ цифры), после хода первого на доске $100+3$ цифры, следующим ходом второй стирает цифры 2121 (на доске $100-1$ цифра), и после хода первого на доске по-прежнему 100 цифр.

3) Не выполняется ни первое, ни второе. Тогда одинаковые цифры разнесены между собой на два разряда, то есть любые шесть подряд идущих цифр выглядят так: $abcabc$.

Рассмотрим случай, когда встретился набор 123123. Стратегия второго игрока представлена в таблице (жирным отмечены цифры, приписываемые вторым игроком):

Кто ходит	Как ходит	Количество цифр
2-ой	$\ldots 1231\mathbf{33}23\ldots$	$+2$
1-ый	$\ldots 1231\mathbf{33}23\ldots x_1$	$+3$
2-ой	$\ldots 12\mathbf{11}313323\ldots x_1$	$+5$
1-ый	$\ldots 12\mathbf{11}313323\ldots x_1x_2$	$+6$
2-ой	$\ldots 121131332 3\mathbf{22}\ldots x_1x_2$	$+8$
1-ый	$\ldots 1211313323\mathbf{22}\ldots x_1x_2x_3$	$+9$
2-ой	$\ldots 12132322\ldots x_1x_2x_3$	$+5$
1-ый	$\ldots 12132322\ldots x_1x_2x_3x_4$	$+6$
2-ой	$\ldots 1212\ldots x_1x_2x_3x_4$	$+2$
1-ый	$\ldots 1212\ldots x_1x_2x_3x_4x_5$	$+3$
2-ой	$\ldots\quad \ldots x_1x_2x_3x_4x_5$	-1
1-ый	$\ldots\quad \ldots x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	0

Таким образом, указанная стратегия позволяет второму игроку сделать так, чтобы записанное на доске число никогда не стало 2005-значным.

5. Решение. Будем называть *диагональю* графа пару вершин, не соединённых ребром. Поставим в соответствие каждой диагонали некоторое простое число, причём разным диагоналям будем ставить в соответствие различные числа (это всегда можно сделать, поскольку простых чисел бесконечно много). Пусть диагоналей n штук, обозначим эти числа $p_1, \ldots, p_n$.

Расставим в вершинах графа числа 1. Затем выберем одну из диагоналей и умножим числа во всех вершинах графа, кроме тех двух, которые образуют выбранную диагональ, на простое число, соответствующее этой диагонали. Эту операцию проведём для каждой диагонали. В итоге получим граф, у которого в вершинах стоят некоторые числа. Покажем, что этот граф — искомый.

Зафиксируем произвольное ребро графа. Очевидно, что для всякой диагонали одна из вершин этого ребра не принадлежит диагонали. Следовательно, число хотя бы в одной из вершин ребра будет умножено

на простое число, соответствующее диагонали. Поскольку простые числа, соответствующие разным диагоналям, различны, получаем, что наименьшее общее кратное чисел в вершинах, соединённых ребром, будет равно произведению $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Значит, первое условие задачи соблюдено.

Теперь рассмотрим диагональ с номером k. Ей соответствует простое число p_k. По построению, ни одна из вершин диагонали не будет умножена на p_k. Что касается всех остальных множителей, то они, по тем же соображениям, что и для рёбер, попадут хотя бы в одну вершину. Значит, наименьшее общее кратное чисел в вершинах, не соединённых ребром, будет равно $p_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{p}_k \cdot \ldots \cdot p_n$ (крышка означает пропуск множителя). Таким образом, наименьшее общее кратное чисел на каждой из диагоналей будет своим (поскольку все числа различны).

6. Решение. Мы будем доказывать утверждение по индукции. Сначала докажем, что из его справедливости для $n=k$ при $k \geqslant 10$ следует, что оно справедливо для $n=k+4$.

Пусть числа $1, \ldots, k$ можно разбить на две группы с произведениями, равными A и B соответственно, так, что $\frac{A}{B} < 1{,}03$, причём $A \geqslant B$. Добавим числа $k+1$ и $k+4$ в группу «A», а числа $k+2$ и $k+3$ определим в группу «B». Тогда произведение чисел в новой первой группе равно $A_1 = A\cdot(k+1)\cdot(k+4)$, а во второй группе равно $B_1 = B\cdot(k+2)\cdot(k+3)$.

Возможны два случая. Если $A_1 \geqslant B_1$, то условие выполнено, поскольку

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B}\cdot\frac{k^2+5k+4}{k^2+5k+6} < 1{,}03\cdot 1 = 1{,}03.$$

Если же $B_1 > A_1$, то отношение большего к меньшему всё равно изменится не сильно:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A}\cdot\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4} = \frac{B}{A}\cdot\left(1+\frac{2}{k^2+5k+4}\right) < \\ < 1\cdot\left(1+\frac{2}{10^2+5\cdot 10+4}\right) < 1{,}03.$$

Чтобы завершить доказательство, осталось обосновать базу индукции, то есть предъявить требуемые разбиения для $n = 10, 11, 12, 13$. Они приведены в следующей таблице:

n	Группа «A»	Группа «B»	Отношение
10	$1\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10 = 1920$	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9 = 1890$	$< 1{,}02$
11	$1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot11 = 6336$	$2\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10 = 6300$	$< 1{,}01$
12	$1\cdot4\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11 = 22176$	$2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot10\cdot12 = 21600$	$< 1{,}03$
13	$1\cdot2\cdot5\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 = 79200$	$3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot12\cdot13 = 78624$	$< 1{,}01$

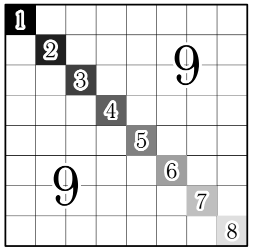

Рис. 83

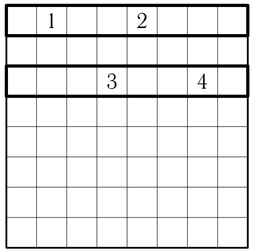

Рис. 84

7. Ответ: 9 цветов.

Решение. Доску можно покрасить в 9 цветов так, как показано на рис 83.

Докажем, что большее количество цветов использовать нельзя. Докажем сначала, что количество цветов не превосходит 10. В первой строке есть клетки не более чем двух цветов, например, цвета 1 и цвета 2 (клеток цвета 2 может не быть вовсе). Рассмотрим какой-нибудь столбец. При покраске этого столбца мы можем использовать не более одного нового цвета (отличного от 1 и 2). Таким образом, использовав не более двух цветов на покраску первой строки, для окрашивания оставшихся 8 столбцов мы можем потратить не более 8 новых цветов, поэтому всего может быть использовано не более 10 цветов.

Докажем теперь, что покрасить доску, использовав 10 цветов, невозможно. Предположим, что нам это удалось. Поскольку количество строк меньше, чем число цветов, найдётся строка, в которой используются два различных цвета (назовём их 1 и 2). Без ограничения общности можно считать, что это первая строка (см. рис. 84). Назовём её первой выделенной строкой. Клетки цветов $3, \ldots, 10$ уже нельзя ставить в первую выделенную строку, значит, эти цвета сосредоточены в оставшихся семи строках. Но так как осталось 8 цветов, какие-то два из них придётся поставить на одну строку. Без ограничения общности это цвета 3 и 4. Будем называть строку, в которой они стоят, второй выделенной строкой. Рассмотрим теперь произвольный столбец. В нём уже есть клетка цвета 1 или цвета 2 (в первой выделенной строке) и клетка цвета 3 или цвета 4 (во второй выделенной строке). Значит, для покраски этого столбца уже нельзя использовать никаких других цветов, кроме 1, 2, 3 или 4. Значит, вся таблица покрашена только в 4 цвета, а не в 10. Полученное противоречие показывает, что 10 цветов использовать нельзя.

8. Ответ: для нечётных n.

Решение. Заметим, что делителями числа $2n$ являются все делители числа n, а также все вдвое большие их числа. Для нечётных n эти два множества делителей не пересекаются, то есть $S(2n) = S(n) + 2S(n) = 3S(n)$. Если же n чётно, то эти множества пересекаются, например, по числу 2 (оно является одновременно делителем числа n и удвоенным делителем числа n). Следовательно, $S(2n) < S(n) + 2S(n)$, то есть равенство выполняется только при нечётном n.

Вариант B

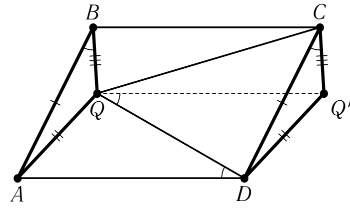

Рис. 85

1. Решение. Построим треугольник $CQ'D$, равный треугольнику ABQ, как показано на рис. 85. Тогда $AQ = DQ'$, $AQ \parallel DQ'$, следовательно, $AQQ'D$ — параллелограмм.

Так как $\angle DQQ' = \angle ADQ = \angle ABQ = \angle DCQ'$, то четырёхугольник $QCQ'D$ — вписанный, поэтому $\angle DQ'C + \angle CQD = \angle BQA + \angle CQD = 180°$.

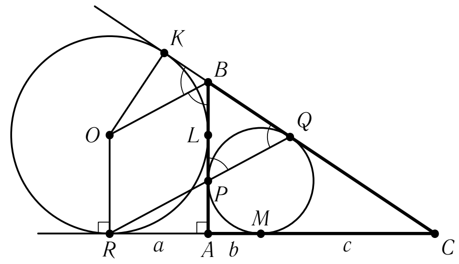

Рис. 86

2. Первое решение. Пусть O — центр вневписанной окружности, K и L — точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны BC и стороной AB, соответственно. Пусть M — точка касания вписанной окружности со стороной AC (см. рис. 86).

Так как $OLAR$ — квадрат, то $OR \parallel AB$ и $OR = AL$.

Докажем, что $BL = AP$. Поскольку $CK = CR$ и $CQ = CM$ (как отрезки касательных), то $CK - CQ = CR - CM$, то есть $BK + BQ = AM + AR$. Используя равенства $RA = AL$, $AM = AP$, $BQ = BP$ и $BK = BL$ (как отрезков касательных), получаем, что $BL + BP = AL + AP$, то есть $2BL + LP = 2AP + LP$, следовательно, $BL = AP$ и $BP = AL$.

Отсюда $OR = AL = BP$ и $OR \parallel AB$, следовательно, $OBPR$ — параллелограмм.

С другой стороны, BO — биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника BPQ, следовательно, $BO \parallel QP$.

Таким образом, $OB \parallel RP$ и $OB \parallel PQ$, следовательно, точки Q, P и R лежат на одной прямой.

Второе решение. Воспользуемся теоремой Менелая. Чтобы доказать, что точки Q, P и R лежат на одной прямой, нам достаточно доказать, что $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$ или, поскольку $BQ = BP$, что $\frac{CR \cdot AP}{QC \cdot AR} = 1$.

Пусть $AR = a$, $AM = b$, $CM = c$. Тогда $CR = a + b + c$, $QC = c$ и $AP = b$, и надо доказать, что $\frac{(a+b+c)b}{ac} = 1$.

Используем доказанное в первом способе равенство отрезков BL

и AP: $AB = AL + BL = AR + AP = AR + AM = a + b$, $BC = BQ + CQ = BP + CM = AL + CM = a + c$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC верно равенство $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то есть $(a+b)^2+(b+c)^2 = (a+c)^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $ab + b^2 + bc = ac$, следовательно, $b(a+b+c) = ac$. А это и требовалось доказать.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

6. См. задачу 7 Высшей Лиги 7.

7. Решение. Разделим каждую из букв пунктирными линиями на три части так, чтобы центральные части были центрально-симметричными, а крайние части — равны по площади (см. рис. 87). Так, у буквы «Б» крайние части имеют площадь 5, а у буквы «П» — площадь 3 (единица площади — квадрат из 9 маленьких клеточек). Точки C_1 и C_2 — центры симметрии центральных частей букв. Заметим, что всякая прямая, проходящая через точку C_1 и пересекающая букву «Б» только по центральной части, делит её на две части равной площади. Аналогично, всякая прямая, проходящая через точку C_2 и пересекающая букву «П» только по центральной части, делит её на две части равной площади. Следовательно, прямая C_1C_2 разбивает каждую из букв на части равной площади (легко проверить, что она наклонена не настолько сильно, чтобы задеть крайние части буквы «Б»). Построить её не составляет труда.

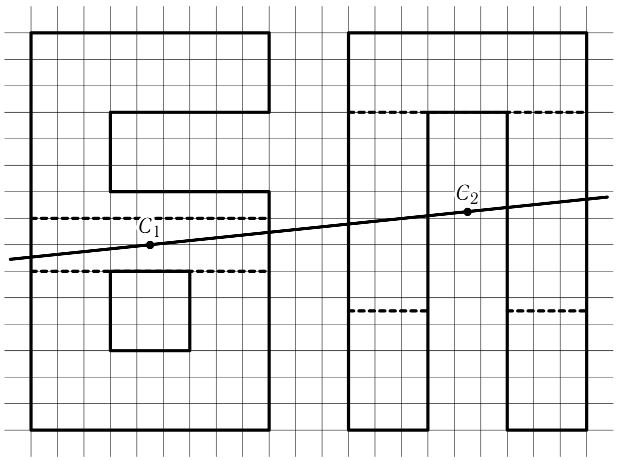

Рис. 87

8. Решение. Положим $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ и $c = \frac{1}{z}$. Тогда $a + b + c = 1$, а выражение в левой части перепишется в следующем виде:

$$L = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca(c+a)}{c^2+ca+a^2}.$$

Оценивая сумму квадратов в знаменателе снизу с помощью неравенства $A^2 + B^2 \geqslant 2AB$, получаем

$$L \leqslant \frac{ab(a+b)}{3ab} + \frac{bc(b+c)}{3bc} + \frac{ca(c+a)}{3ca} = \frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

Вариант А

1. См. задачу 1 Варианта В.

2. См. задачу 2 Варианта В.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. Ответ: выигрывает второй.

Решение. Будем называть столбец (или строку) *открытым*, если в нём закрашена ровно одна клетка, и *закрытым*, если закрашенных клеток — две.

Будем ходить каждым ходом в пустой столбец и в ту же строку, что и первый, до тех пор, пока первый не закроет какой-нибудь столбец, либо пока не кончатся пустые столбцы. В первом случае ещё есть пустые столбцы (после хода второго всегда оставалось нечётное число ещё неоткрытых столбцов), поэтому второй может, сходив в ту же строку, открыть новый столбец. Во втором случае второй, сходив в ту же строку, закрывает любой столбец. И в том и в другом случае после хода второго остаётся чётное число открытых столбцов и чётное число пустых столбцов (то есть тех, в которые ещё не ходили).

Теперь второй будет поддерживать сложившуюся после его хода ситуацию, то есть

- чётное число открытых столбцов,
- чётное число пустых столбцов,
- нет открытых строк,

действуя следующим образом: если первый открывает новый столбец, то и второй открывает новый столбец, сходив в ту же строку. Если первый закрывает столбец, то и второй закрывает любой другой столбец, сходив в ту же строку.

Второй всегда может сделать ход, следуя этой стратегии, значит, он не проиграет. Поскольку ничьих не бывает, то он выиграет.

5. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

6. Решение. Заметим, что если (a, b, c) — решение данного уравнения, то $(p^6 \cdot a, p^4 \cdot b, p^3 \cdot c)$ — тоже решение (здесь p — произвольное натуральное число). Следовательно, достаточно найти хотя бы одно решение. Рассмотрим тождество $1 + 8 = 9$ и домножим его на 3^6, получим $3^6 + 2^3 \cdot 3^6 = 3^8$. Переписывая его в виде $(3^3)^2 + (2 \cdot 3^2)^3 = (3^2)^4$, видим, что решением нашего уравнения является, например, тройка $(27, 18, 9)$.

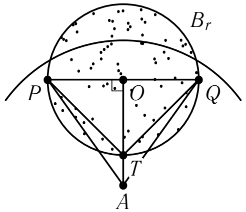

Рис. 88

7. Решение. Пусть B_r — круг минимального радиуса, накрывающий все красные точки, а B_b — круг минимального радиуса, накрывающий все синие точки. Без ограничения общности, радиус B_r не превосходит радиус B_b.

В силу минимальности на границе B_r найдутся либо две диаметрально противоположные красные точки, либо три красные точки, образующие остроугольный треугольник (иначе круг B_r можно было бы уменьшить). Поскольку любой круг радиуса 1 с центром в синей точке содержит все красные точки, то он должен содержать по крайней мере половину окружности круга B_r.

Допустим, что радиус круга B_r больше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Все синие точки не могут лежать *строго внутри* круга B_r (иначе их можно было бы накрыть кругом меньшего радиуса). Поэтому есть синяя точка, лежащая на границе B_r или вне его. Обозначим эту синюю точку через A. Покажем, что круг радиуса 1 с центром в точке A (будем называть его синим) содержит менее половины окружности круга B_r.

Предположим противное. Пусть O — центр B_r. Тогда синий круг содержит диаметр PQ красного круга, перпендикулярный AO (см. рис. 88). Точку пересечения отрезка AO и красной окружности обозначим через T. Имеем $OP = OT > \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$PT > \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Но так как $OA \geqslant OT$, то $1 \geqslant PA \geqslant PT$. А мы только что доказали, что $PT > 1$. Противоречие.

Итак, синий круг содержит менее половины окружности круга B_r, а с другой стороны имеет радиус 1. Но мы уже в самом начале доказали, что такого не может быть. Значит, исходное допущение неверно, и на самом деле радиус B_r не превосходит $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. Ответ: нет, не существует.

Решение. Рассмотрим первые 99 членов этой последовательности: $a_1, \ldots, a_{99}$. Положим

$$P = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{99}, \quad S = a_1 + \ldots + a_{99}.$$

Пусть a — какой-либо член этой последовательности. По условию имеем $(P \cdot a) \vdots (S + a)$. Положим $d = \text{НОД}(a, S + a)$. Из алгоритма Евклида следует, что $d \leqslant S$. Кроме того, $(P \cdot d) \vdots (S + a)$. Отсюда следует, что $P \cdot d \geqslant S + a$, а из предыдущего неравенства — что $P \cdot S \geqslant P \cdot d$. Следовательно, имеет место цепочка неравенств:

$$P \cdot S \geqslant P \cdot d \geqslant S + a.$$

Числа P и S — фиксированные, а число a было произвольным членом последовательности. Из последнего неравенства следует, что $a \leqslant P \cdot S - S$, то есть число a ограничено константой. Следовательно, последовательность не может быть бесконечно возрастающей.

2.3. Личная олимпиада

2.3.1. 6–7 класс

Довывод

1. Решение. Заметим, что, переставляя буквы в словах ELEVEN и TWO, мы можем получить слова ONE и TWELVE. Следовательно, слово TWELVE стоит $16 + 9 - 6 = 19.

Комментарий. Заметим, что и на самом деле TWELVE = ELEVEN + TWO − ONE, так как $12 = 11 + 2 - 1$.

2. Решение. Развернём книжку так, чтобы угол между страницами стал прямым, а затем вырежем из неё полоску, как показано на рис. 89.

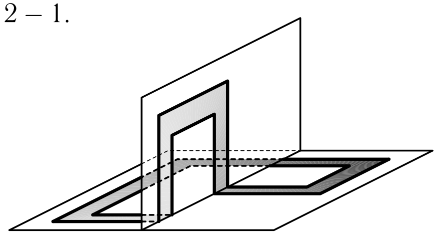
Рис. 89

3. Решение. Увеличим номер каждой оставшейся нечётной страницы на 1. Тогда обе страницы на каждом листе имеют одинаковые чётные номера и их сумма кратна 4. Значит, сумма всех «новых» номеров оставшихся страниц кратна 4. Поскольку вырвано в 4 раза меньше страниц, чем осталось, то количество оставшихся страниц также делится на 4. Следовательно, мы увеличили сумму номеров страниц на число, кратное 4, а значит и исходная сумма номеров невырванных страниц кратна 4.

4. Решение. Пусть в вершинах записаны числа a, b и c. Тогда на сторонах записаны числа ab, bc и ac, а в самом треугольнике — число abc. По условию,

$$a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1000.$$

Прибавим к обоим частям уравнения по 1, получим

$$1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1001.$$

Сгруппируем слагаемые в левой части и разложим её на множители:

$$\begin{aligned}&(1 + a) + (b + ab) + (c + ac) + (bc + abc) =\\ &\quad= (1 + a) + (1 + a)b + (1 + a)c + (1 + a)bc =\\ &\quad= (1 + a)(1 + b + c + bc) = (1 + a)(1 + b + c(1 + b)) =\\ &\quad= (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.\end{aligned}$$

Заметим, что поскольку числа a, b и c — натуральные, то ни одна из скобок не равна 1. Следовательно, $a + 1$, $b + 1$ и $c + 1$ — числа 7, 11, 13, взятые в некотором порядке, поэтому a, b и c — это числа 6, 10, 12.

Вывод

5. Решение. Нет, неверно. Например, можно разрезать прямоугольник 5×9 на уголки из трёх клеток так, как показано на рис. 90.

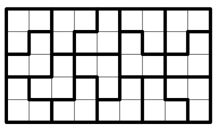

Рис. 90

6. Ответ: нет, не могут.

Решение. Раскрасим кварталы города в шахматном порядке так, чтобы справа от первого велосипедиста в момент старта находился чёрный квартал. Докажем, что в каждый момент времени чёрный квартал находится справа от любого из велосипедистов. Действительно, пусть это было верно в некоторый момент времени. Доехав до конца квартала, велосипедист либо повернёт налево, и тогда справа от него будет другой чёрный квартал, либо повернёт направо, и тогда справа от него окажется тот же чёрный квартал.

Теперь докажем, что велосипедисты не встретятся. Очевидно, что они не могут встретиться на перекрёстке. Поскольку велосипедисты едут с одной скоростью, они смогут встретиться, только если будут ехать навстречу друг другу. Но тогда получится, что чёрный квартал находится по левую руку от одного из велосипедистов. А это невозможно.

7. Решение. Пусть ABC — данный треугольник, CD — его медиана. Построим угол $ABE = 30°$ (см. рис. 91). Тогда треугольник ABE — равнобедренный с основанием AB. В нём медиана является высотой и биссектрисой, поэтому $\angle DEB = \angle DEA = 60°$. Продолжим отрезок BE за точку E, тогда EA — биссектриса угла FED. Следовательно, точка C — точка пересечения биссектрисы внешнего угла FED и биссектрисы угла ABE, поэтому она равноудалена от прямых EF, DE и AD. Следовательно, точка C лежит на биссектрисе внешнего угла ADE. Так как угол ADE — прямой, то $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle ADE = 45°$.

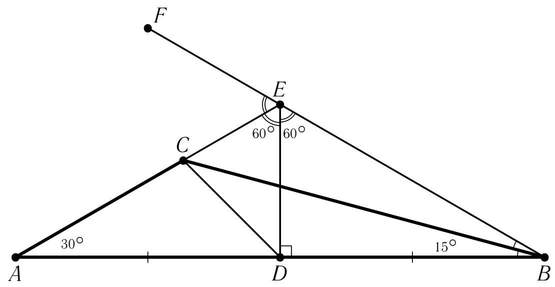

Рис. 91

2.3.2. 8–9 класс

Довывод

1. Решение. Будем называть параллельными не только прямые, не имеющие общих точек, но и совпадающие. Каждая из данных парабол имеет ось симметрии, параллельную прямой Oy. Поскольку параболы симметричны относительно прямой ℓ, то и эти оси симметричны относительно ℓ. Следовательно, они либо параллельны прямой ℓ (тогда ℓ параллельна оси ординат), либо перпендикулярны ей (тогда ℓ параллельна оси абсцисс).

2. Решение. Пусть тумба находится в точке T. Тогда лев движется вдоль ломаной $TABC$ (см. рис. 92). Продолжим AT до пересечения с окружностью в точке D. Хорды BC и AD симметричны относительно центра окружности, так как они перпендикулярны хорде AB. Следовательно, независимо от начального направления, лев пройдёт через точку T', симметричную точке T относительно центра окружности.

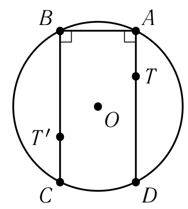

Рис. 92

3. Ответ: нет, нельзя.

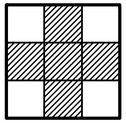

Рис. 93

Первое решение. Пусть можно добиться того, чтобы все числа стали равны некоторому натуральному числу n. Тогда сделано $3n$ ходов. Рассмотрим крест из пяти клеток (см. рис. 93). Любой уголок занимает не менее двух клеток креста и не более одной клетки вне креста. Следовательно, при увеличении трёх чисел на 1 сумма чисел в клетках креста увеличивается по крайней мере на 1 больше, чем сумма чисел в остальных клетках. Значит, после $3n$ ходов сумма чисел в клетках креста будет отличаться от суммы чисел в остальных клетках не менее, чем на $3n$, а должна отличаться на $5n - 4n = n$.

Второе решение. Пусть можно добиться того, чтобы все числа стали равны некоторому натуральному числу n. Тогда сумма всех чисел в квадрате равна $9n$. Рассмотрим углы квадрата. Заметим, что с помощью одного уголка нельзя увеличить число одновременно в двух углах. Значит, нужно поставить минимум $4n$ уголков. Но тогда сумма чисел во всём квадрате будет не меньше $4 \cdot 3n = 12n > 9n$. Противоречие.

4. Первое решение. Возведём левую часть неравенства в квадрат и применим неравенство $(A+B)^2 \leqslant 2(A^2+B^2)$:

$$\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\left(1-\frac{b^2}{(a+b)^2}\right)+\left(1-\frac{a^2}{(a+b)^2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(1+1-\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right) = 2\left(1+\frac{2ab}{(a+b)^2}\right) \leqslant 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Второе решение. Так как $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}$, то

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}+1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2ab+b^2+2ab+a^2}{(a+b)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2+2b^2+8ab}{(a+b)^2}} = \sqrt{2+\frac{4ab}{(a+b)^2}} \leqslant \sqrt{3},$$

так как $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

Вывод

5. Решение. По условию каждая команда в первой игре забила 1 гол. В случае ничьей она и пропустила 1 гол. Тогда для другой команды эта встреча также была первой. Так как количество команд нечётно, их нельзя разбить на пары. Значит, хотя бы одна из команд сыграла не вничью свой первый матч. Аналогичное верно для вторых, третьих, ..., десятых матчей. Поскольку каждый матч учтён дважды, результативных матчей (то есть не ничейных) было не менее 5, а тогда ничьих было не больше $\frac{11\cdot 10}{2} - 5 = 50$.

Приведём пример турнира с 50 ничьими. Занумеруем команды числами от 1 до 11 и в таком порядке расположим по кругу. Составим 5 пар из соседних команд (оставив 11-ю команду без пары). Сначала играют между собой команды в парах, а затем 11-я играет с 1-й (со счётом 1 : 2). Снова объединяем команды в пары, исключая на этот раз 1-ю, и пусть снова встретятся команды в парах (и вновь будет 5 ничьих).

Теперь расположим команды по кругу с шагом 2, а именно в порядке 1 3 5 7 9 11 2 4 6 8 10 (у каждой команды оба соседа поменялись). Применив ту же схему розыгрыша, получим ещё 11 игр, из которых одна результативная. Далее применим эту же схему для шага 3, 4 и 5. Всего получим $11 \cdot 5 = 55$ игр, из которых 50 ничьих, что и требовалось.

6. Решение. Так как четырёхугольник $ZTVW$ — вписанный, то $\angle CTV = \angle ZWV = \angle BAC$ (см. рис. 94). Прямая VT параллельна касательной CR в точке C к окружности ω, описанной около треугольника ABC, так как $\angle BAC = \angle BCR$. Рассмотрим точку M — середину отрезка VT. Имеем $PM = MC$, так как $PTCV$ — параллелограмм.

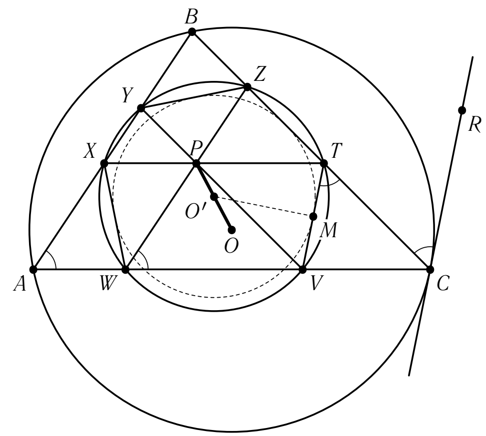

Рис. 94

Сделаем гомотетию с центром в точке P с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Пусть центр O окружности ω при этой гомотетии переходит в точку O'. Окружность ω перейдёт в окружность ω′, проходящую через середины отрезков XW, YZ и VT. Эти отрезки будут касаться окружности ω′, поскольку при гомотетии касательная CR останется параллельной самой себе и перейдёт в прямую VT. Кроме того, точки касания окружности ω′ будет серединами отрезков XW, YZ и VT. Далее, эти отрезки попарно равны как боковые стороны трапеций, вписанных в окружность. Значит, точки X, Y, Z, T, V и W будут равноудалены от точки O'. Поэтому точка O' является центром окружности, проходящей через точки X, Y, Z, T, V, W. По построению, точки P, O и O' лежат на одной прямой (ибо O' гомотетична O относительно P).

7. Ответ: да, существует.

Решение. Возьмём простые числа p и q такие, что $2004 < p < q$, и рассмотрим вначале следующую арифметическую прогрессию с разностью $q - p$:

$$p, q, \ldots, p + 2004(q - p).$$

Ясно, что число $p + k(q - p)$, где $0 \leqslant k \leqslant 2004$, делится на p лишь при $k = 0$, то есть ни один из членов прогрессии, кроме первого, не делится на p. Аналогично, такое число делится на q лишь при $k = 1$, то есть ни один член прогрессии, кроме второго, не делится на q. Обозначим через P произведение всех членов нашей прогрессии и докажем, что арифметическая прогрессия

$$P \cdot p, P \cdot q, \ldots, P \cdot \big(p + 2004(q - p)\big)$$

является искомой. Произведение всех её членов, равное P^{2006}, является точным квадратом. Далее, любой член новой прогрессии, кроме первого, делится на p и не делится на p^2, а первый член делится на q и не делится на q^2. Значит, точных квадратов среди членов этой прогрессии нет.

2.4. Командная олимпиада

1. Решение. По условию,

$$(10 \cdot A + X)(10 \cdot Э + X) = (10 \cdot X + Э)(10 \cdot X + A).$$

Раскрыв скобки в этом выражении, получим

$$100 \cdot A \cdot Э + 10 \cdot X \cdot Э + 10 \cdot A \cdot X + X^2 = 100 \cdot X^2 + 10 \cdot X \cdot Э + 10 \cdot A \cdot X + A \cdot Э.$$

Упрощая выражение, получаем $99 \cdot A \cdot Э = 99 \cdot X^2$. Так как число не может начинаться с нуля, то $Э \neq 0$ и $X \neq 0$. Разделив обе части полученного равенства на $99 \cdot X \cdot Э$, получаем требуемое.

2. Ответ: нет, неверно.

Решение. Возьмём прямоугольник $ABCD$ и рассмотрим четыре треугольника ABC, BCD, CDA и DAB (см. рис. 95). Они удовлетворяют условию задачи, однако вершины, общей для всех четырёх треугольников, не существует.

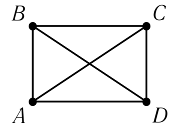

Рис. 95

3. Ответ: 6 часов.

Решение. За 6 часов с момента начала боя часовая стрелка пройдёт половину циферблата и окажется между 16 и 17 часами, а минутная обойдёт циферблат 6 раз, поэтому угол между ними изменится на 180°. Стрелки совпадут, но между 16 и 17 часами стрелки не могут совпасть дважды. Значит, это и есть момент окончания боя.

Примечание. Задача может быть также решена путём составления уравнения.

4. Ответ: 7 цифр.

Решение. Заметим, что меньшим числом символов обойтись нельзя. В самом деле, если цифр не больше 6, то какие-то две из четырёх букв должны быть закодированы последовательностью длины 1, то есть одна из них закодирована цифрой 0, а другая — цифрой 1. Но тогда можно расшифровать любую последовательность, используя только эти две буквы.

Закодируем буквы, например, так:

С	«10»
Л	«11»
О	«0»
Н	«01»

Все остальные буквы закодируем разным количеством единиц, большим трёх. Нашему слову будет соответствовать последовательность 1011001. Буквы, закодированной «1», нет, а буква, начинающаяся с «10», ровно одна — «10». Таким образом, первая буква однозначно восстанавливается. Аналогично существует ровно одна буква, начинающаяся с «11», и не существует буквы, начинающейся с «110». Значит вторая буква тоже расшифрована. Буквы, код которой начинается с «00», нет, значит третья буква закодирована символом «0». Если код четвёртой буквы — «0», то пятая буква должна быть закодирована символом «1», а таких букв не бывает, значит четвёртая буква закодирована «01».

Примечание. Существуют и другие примеры, но буква, закодированная одной цифрой, не может быть первой или последней.

5. Решение. Выберем произвольное простое число p, большее 1001. Докажем, что выигрышным является либо число p, либо число $p-1$. Если для $n = p - 1$ первый игрок имеет выигрышную стратегию, то задача решена. В противном случае выигрышную стратегию имеет второй игрок. В этом случае выберем $n = p$. Первым ходом первый игрок вычёркивает одно число p и оставляет второму игроку проигрышную позицию — числа от 1 до $p - 1$. Следовательно, в этом случае первый игрок имеет выигрышную стратегию.

6. Ответ: можно. Например, число 1346897520 удовлетворяет условию.

Комментарий. Если последняя цифра числа — ноль, то с делимостью на 5 проблем не возникает. Поскольку сумма всех цифр числа равна 45, при вычёркивании цифр 3 или 9 сумма цифр оставшегося числа будет делиться, соответственно, на 3 и на 9. Чтобы обеспечить делимость на 2, 4 и 8, можно последние три цифры числа сделать равными 5, 2 и 0 соответственно. Осталось подобрать положение остальных цифр так, чтобы при вычёркивании цифры 7 оставшееся число делилось на 7.

7. Ответ: 30 уголков.

Решение. Очевидно, что из каждого квадратика 2×2 можно вырезать по уголку. На рис. 96 приведён пример многоугольника, из которого нельзя вырезать больше. Докажем это. Будем говорить, что уголок принадлежит квадрату, если в этом квадрате лежат хотя бы две из его трёх клеток. Заметим, что ни одному квадрату не может принадлежать более одного уголка. Таким образом, уголков не больше, чем квадратов.

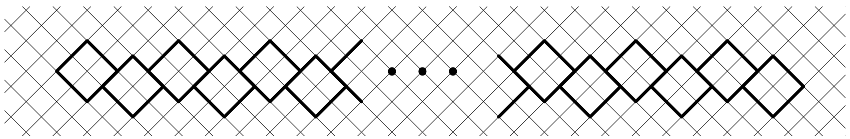

Рис. 96

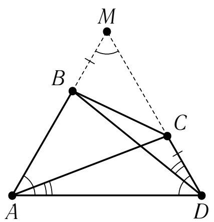

Рис. 97

8. Решение. Продолжим стороны AB и DC до пересечения в точке M, тогда $\angle AMD = 60°$. Следовательно, треугольник AMD равносторонний. Треугольники MBD и DCA равны по стороне ($AD = MD$) и двум прилежащим углам, следовательно, $MB = DC$. Поэтому

$$AB + DC = AB + BM = AM = AD.$$

9. Первое решение. Рассмотрим следующую цепочку неравенств: $2(x^2 + y^2) \geqslant (x + y)^2 > 1 \cdot (x + y)$. Докажем первое неравенство:

$$2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) - x^2 - 2xy - y^2 = (x - y)^2 \geqslant 0.$$

Второе неравенство следует из условия.

Второе решение. Разделим обе части неравенства на 2, вычтем из левой части неравенства правую и преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

Уравнение $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0$ задаёт окружность с радиусом $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и центром в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 98). Неравенству $x + y > 1$ удовлетворяют те точки (x, y) плоскости, которые расположены выше прямой $x + y = 1$.

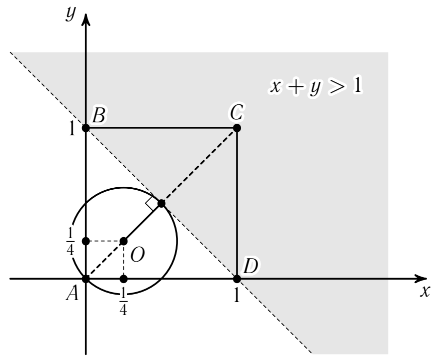

Рис. 98

Расстояние от центра окружности до прямой $x + y = 1$ равно

$$\frac{AC}{2} - AO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

то есть окружность касается этой прямой и, следовательно, не имеет общих точек с закрашенной частью плоскости. Таким образом, закрашенная часть плоскости удовлетворяет неравенству

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} > 0.$$

10. Решение. Если $YZ \parallel AD$, то $\frac{EZ}{ZD} = \frac{EY}{YA}$. Треугольник BEY подобен треугольнику XAY, а треугольник CEZ подобен треугольнику XDZ. Следовательно, $\frac{EC}{XD} = \frac{EZ}{ZD} = \frac{EY}{YA} = \frac{BE}{AX}$, откуда $\frac{CE}{BE} = \frac{DX}{XA}$.

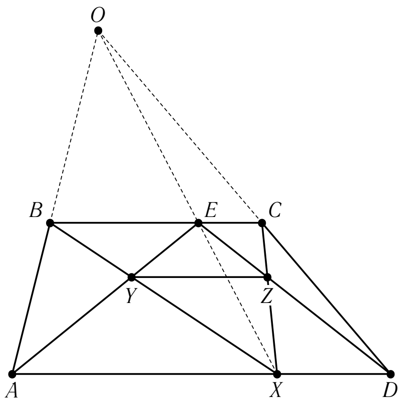

Рис. 99

Таким образом, задача сведена к нахождению точки, которая делит отрезок AD в том же отношении, что точка E делит отрезок BC. Её можно найти, например, следующим образом. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD (см. рис. 99). Тогда точка, в которой прямая OE пересекает отрезок AD, является искомой точкой X.

11. Ответ: длина Петиного коврика стала равна p^2.

Решение. Пусть стороны коврика были равны n и kn. Тогда площадь коврика была равна kn^2. После перекраивания большая сторона стала равна $kn+p$, значит, меньшая равна $\frac{kn^2}{kn+p}$. Поскольку это тоже целое число, kn^2 делится на $kn+p$. Так как $n(kn+p) = kn^2 + np$, то и np делится на $kn+p$. Тогда на $kn+p$ делятся $k \cdot np$ и $knp + p^2 = p(kn+p)$. Значит, p^2 делится на $kn+p$, то есть $kn+p$ равно 1, p или p^2. Но $kn+p$ больше p и потому равно p^2.

12. Ответ: да, существуют.

Решение. Выберем n так, чтобы $\frac{n+1}{2}$ было достаточно большим треугольным числом (например, $n+1 = 10^{100}(10^{100}+1)$). Сложив n треугольных чисел, равных $\frac{n+1}{2}$, мы также получим треугольное число, равное $\frac{n(n+1)}{2}$.

13. Ответ: да, существуют.

Решение. Заметим, что сумма чисел от 1 до n равна треугольному числу: $1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Также равна треугольному числу и сумма чисел от 1 до $n+1$. Выберем n так, чтобы $n+1$ было достаточно большим треугольным числом (например, $n+1 = \frac{10^{100}(10^{100}+1)}{2}$). Тогда искомыми треугольными числами будут сумма чисел от 1 до n и число $n+1$.

14. Решение. Пусть существует r чисел, удовлетворяющих условию. Выпишем их все одно под другим. Оценим сверху и снизу количество P различных пар цифр 1—2, стоящих в одном столбце. (Более формально: нас интересует количество троек (i, j, k), где i и j — номера строк, k — номер столбца, причём на пересечении k-го столбца и i-й строки стоит 1, а на пересечении k-го столбца и j-й строки — 2.)

С одной стороны, количество пар строк равно $\frac{r(r-1)}{2}$, и для каждой пары строк найдётся не менее $0{,}51n$ пар единиц и двоек, поэтому $P \geqslant 0{,}51n \cdot \frac{r(r-1)}{2}$. С другой стороны, если в столбце x единиц, то двоек имеется $r-x$, поэтому количество интересующих нас пар равно $x(r-x) \leqslant \frac{r^2}{4}$. Поэтому $P \leqslant n \cdot \frac{r^2}{4}$.

Решая неравенство $n \cdot \frac{r^2}{4} \geqslant 0{,}51n \cdot \frac{r(r-1)}{2}$, получаем $r \leqslant 51$. Таким образом, можно выбрать не более 51 числа, удовлетворяющего условию.

15. Решение. Докажем, что $O_1O_2 = CO$. Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = CO$. Прямоугольные треугольники BHC и BCA подобны по острому углу (см. рис. 100). Коэффициент подобия равен отношению гипотенуз и равен $\frac{a}{c}$. Значит, $HO_2 = \frac{a}{c}x$ (расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности). Аналогично, $HO_1 = \frac{b}{c}x$. Так как O_1 — центр вписанной окружности треугольника ACH, то $\angle O_1HC = 45°$. Аналогичным образом получаем $\angle O_2HC = 45°$. Значит, $\angle O_1HO_2 = 90°$, следовательно,

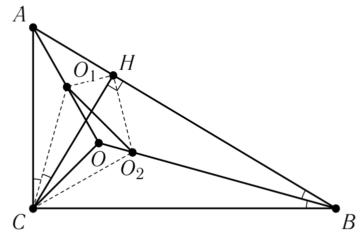

Рис. 100

$$O_1O_2^2 = HO_1^2 + HO_2^2 = \frac{b^2}{c^2}x^2 + \frac{a^2}{c^2}x^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}x^2 = x^2 = CO^2.$$

Докажем, что $O_1O_2 \perp CO$. Направленные углы O_1AC и O_2CB равны, как половины равных углов BAC и HCB. Так как $AC \perp BC$, то $AO_1 \perp CO_2$. Аналогично, $BO_2 \perp CO_1$. Так как AO_1 и BO_2 пересекаются в точке O, то O является ортоцентром треугольника CO_1O_2. Поэтому CO — высота в том же треугольнике, то есть $CO \perp O_1O_2$.

2.5. Математическая карусель

2.5.1. Исходный рубеж

1. Ответ: 7 или 8.

2. Ответ: 8 руб.

3. Ответ: можно разрезать фигуру на трёхклеточные уголки (см. рис. 101).

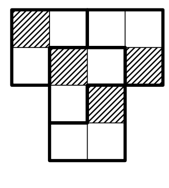

Рис. 101

4. Ответ: у 2500.

5. Ответ: выиграла 3 : 0, вничью 0 : 0, проиграла 0 : 1.

6. Ответ: на одну.

7. Ответ: 53.

8. Ответ: 9 часов.

9. Ответ: можно разрезать на пятиклеточные уголки (см. рис. 102).

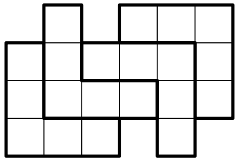

Рис. 102

10. Ответ: например, $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

11. Ответ: 3.

12. Ответ: $22 + 979 = 1001$.

2.5.2. Зачётный рубеж

1. Ответ: 8 руб. 40 коп.

2. Ответ: 9.

3. Ответ: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$.

4. Ответ: 20, 25, 30, 35.

5. Ответ: 49.

6. Ответ: Фрол Фомич.

7. Ответ: 10.

8. Ответ: 28.

9. Ответ: можно разрезать так, как показано на рис. 103.

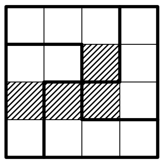

Рис. 103

10. Ответ: 500000.

11. Ответ: $2004 = 667 + 668 + 669$.

12. Ответ: 105.

13. Ответ: все три случая возможны.

14. Ответ: 40.

15. Ответ: 1003 раза.

16. Ответ: можно разрезать так, как показано на рис. 104.

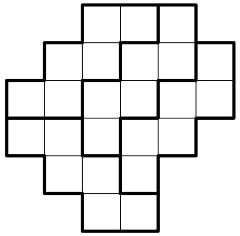

Рис. 104

17. Ответ: 14 друзей.

18. Ответ: 12 *км/ч*.

19. Ответ: 22 числа.

20. Ответ: 70 распилов.

3. Приложение

3.1. Призёры турнира математических боёв

7 класс (Высшая Лига)	
I	«Эврика», г. Харьков (рук. А. Л. Берштейн)
II	школа №17, г. Москва (рук. Д. А. Коробицын)
III	«Дворец-2», г. Москва (рук. Г. В. Кондаков)
6–7 класс (Первая Лига)	
I	г. Троицк (рук. И. А. Цвелая)
8–9 классы (Высшая Лига)	
I	ФМЛ №9, г. Пермь (рук. Г. А. Одинцова)
II	«1543-8-2», г. Москва, гимназия №1543 (рук. И. В. Раскина)
II	«1543-9-1», г. Москва, гимназия №1543 (рук. А. В. Хачатурян)
III	«1543-9-2», г. Москва, гимназия №1543 (рук. А. В. Хачатурян)
III	«1543–57», г. Москва, сборная (рук. С. Е. Дубов)
8–9 классы (Первая Лига)	
I	лицей «Вторая школа», г. Москва (рук. Л. В. Санина)
II	школа №218, г. Москва (рук. Ю. А. Блинков)
II	«1543-8-1», г. Москва, гимназия №1543 (рук. И. В. Раскина)
III	г. Кострома (рук. Н. Л. Чернятьев)
III	г. Магнитогорск (рук. А. В. Христева)

3.2. Призёры личной олимпиады

6 класс	
I	Дудкин Александр — г. Харьков, «Эврика», ФМЛ №27
II	Ивлев Фёдор — г. Троицк, лицей
II	Артемьев Михаил — г. Троицк, гимназия (4 класс)
II	Николаев Семён — г. Москва, МММФ[1]
ПГ[2]	Ланина Наталья — г. Москва, ДНТТМ[3]
ПГ	Василенко Никита — г. Москва, ДНТТМ
ПГ	Баранова Ксения — г. Москва, ДНТТМ

[1] Малый механико-математический факультет
[2] Похвальная грамота
[3] Дом научно-технического творчества молодёжи

ПГ	Андреева Анна — г. Москва, МММФ
ПГ	Артемьева Галина — г. Троицк, гимназия
ПГ	Нуждин Даниил — г. Москва, МММФ
ПГ	Коломеец Иван — г. Москва, ДНТТМ
7 класс	
I	Соболев Евгений — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
II	Таран Александр — г. Омск, ФМЛ №64
II	Гусев Антон — г. Омск, ФМЛ №64
II	Василенко Артём — г. Омск, ФМЛ №64
II	Таранникова Екатерина — г. Москва, школа №2007
III	Ефремов Дмитрий — г. Магнитогорск
III	Лисичкин Владислав — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
III	Соболев Дмитрий — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
III	Маянцев Кирилл — г. Волгореченск, школа №3
III	Мошкин Виталий — г. Магнитогорск
III	Бичурин Игорь — г. Харьков, «Эврика», УВК №55
III	Паламарчук Игорь — г. Москва, ДНТТМ
III	Царьков Олег — г. Москва, ДНТТМ
8 класс	
I	Марченко Евгений — г. Москва, гимназия №1543
II	Андреев Михаил — г. Москва, лицей «Вторая школа»
II	Ромаскевич Елена — г. Москва, гимназия №1543
III	Морозов Сергей — г. Москва, гимназия №1543
III	Погребнов Алексей — г. Москва, гимназия №1543
III	Кисловская Анна — г. Кострома, лицей №32
III	Удимов Даниил — г. Москва, гимназия №1543
III	Фурашова Мария — г. Кострома, лицей №32
III	Чекалкин Серафим — г. Москва, гимназия №1543
III	Гладков Игорь — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Демин Алексей — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Цой Светлана — г. Москва, школа №2007
ПГ	Марченко Денис — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Сильченко Анна — г. Москва, лицей «Вторая школа»
ПГ	Хатунцев Денис — г. Москва, гимназия №1543
9 класс	
II	Малеев Андрей — г. Снежинск, гимназия №127
II	Селегей Даниил — г. Москва, гимназия №1543
II	Кочерга Евгений — г. Снежинск, гимназия №127
II	Арутюнов Владимир — г. Москва, гимназия №1543
II	Хайруллин Егор — г. Пермь, ФМЛ №9
III	Хлебников Фёдор — г. Москва, гимназия №1543

III	Волков Фёдор — г. Москва, гимназия №1543
III	Махлин Антон — г. Москва, гимназия №1543
III	Котов Андрей — г. Москва, гимназия 1№543
III	Махлин Игорь — г. Москва, гимназия №1543
III	Кухаренко Артём — г. Москва, гимназия №1543
III	Истомин Алексей — г. Пермь, ФМЛ №9
III	Рощупкин Александр — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Тимофеева Диана — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Шапцев Алексей — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Горбатов Роман — г. Снежинск, гимназия №127
ПГ	Реброва Елизавета — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Соколов Иван — г. Москва, школа №91
ПГ	Кочанов Георгий — г. Москва, школа №91
ПГ	Осечкина Мария — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Лобода Иван — г. Снежинск, гимназия №127

Специальную премию за самое быстрое решение топологической задачи получил ученик 4-го класса гимназии города Троицка Михаил Артемьев.

Оглавление

Редакторы: *М. Берштейн*, *Д. Вельтищев*, *Д. Мусатов*, *Н. Нетрусова*, *Б. Френкин*.
Тех. редактор: *М. Вельтищев*.
Обложка: *М. Вельтищев*.

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 16.02.2006 г.
Формат $60 \times 90/16$. Печать офсетная. Печ. л. 6. Тираж 1000 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга».
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru